ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Ιωάννης Βανδουλάκης • Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης • Σπύρος Φερεντίνος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ

Τόμος 1ος

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
Τόμος 1ος

<u>ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ</u>

Ιωάννης Βανδουλάκης, ***Μαθηματικός***
Χαράλαμπος Καλλιγάς, ***Μαθημ/κός-Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης***
Νικηφόρος Μαρκάκης, ***Μαθημ/κός-Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης***
Σπύρος Φερεντίνος, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

<u>ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ</u>

Χαράλαμπος Τσίτουρας, ***Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ-Χαλκίδας***
Γεώργιος Μπαραλός, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθ/κών***
Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου, ***Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

<u>ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ</u>

Κλειώ Γκιζελή, ***Ζωγράφος***
Ιόλη Κυρούση, ***Γραφίστρια***

<u>ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>

Βαρβάρα Δερνελή, ***Φιλόλογος Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ</u>

Αθανάσιος Σκούρας, ***Σύμβουλος Παιδαγωγ. Ινστιτούτου***

<u>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</u>

Μανώλης Χάρος, ***Ζωγράφος***

<u>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</u>

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Στη συγγραφή του πρώτου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και η Θεοδώρα Αστέρη, ***Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
Τόμος 1ος

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο Δημοτικό σχολείο ολοκληρώθηκε ο πρώτος κύκλος της βασικής εκπαίδευσης. Στο Γυμνάσιο, θα στηριχτούμε στις γνώσεις που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, θα τις αξιοποιήσουμε και θα προσπαθήσουμε να τις αναπτύξουμε και να τις διευρύνουμε.

Στην πορεία αυτή, ίσως διαπιστώσουμε ότι οι γνώσεις που διαθέτουμε δεν επαρκούν πάντα. Πρέπει, λοιπόν, να συμπληρωθούν κατάλληλα και μετά να προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα, στο νέο προβληματισμό και τέλος στην καινούρια γνώση. Έτσι, με τη δική μας προσπάθεια και παράλληλα με τη βοήθεια και την καθοδήγηση του καθηγητή μας, θα καταφέρουμε, όλοι μαζί μέσα στην τάξη, να αναπτύξουμε τις δυνατότητές μας, προσθέτοντας, όχι μόνο γνώσεις αλλά και νέους τρόπους να τις αποκτούμε.

Τα Μαθηματικά τα γνωρίζουμε ως ένα σχολικό μάθημα. Δεν πρέπει όμως να μείνουμε μόνο σ' αυτό. Όσα περισσότερα Μαθηματικά ξέρουμε και χρησιμοποιούμε, τόσο καλύτερα ερμηνεύουμε τον κόσμο μας και τελικά τον κατανοούμε. Είναι ένας κώδικας απαραίτητος για την κατανόηση του κόσμου μας, που λειτουργεί όπως η "γλώσσα" προγραμματισμού στους υπολογιστές. Όσες περισσότερες "λέξεις" ξέρει κανείς από αυτή τη "γλώσσα", δηλαδή τα Μαθηματικά, τόσο καλύτερα αξιοποιεί τις δυνατότητες του μυαλού του. Επίσης, τα Μαθηματικά δεν είναι απλά ένα εργαλείο για τη βελτίωση των ατομικών επιδόσεων, αλλά ένας βασικός μοχλός που βοηθάει την κοινωνική ανάπτυξη.

Το βιβλίο αυτό φιλοδοξεί να αποτελέσει ένα βήμα προς τις κατευθύνσεις αυτές. Είναι γραμμένο σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου, καθώς και τις συγκεκριμένες προδιαγραφές και οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Σημαντικό χαρακτηριστικό του βιβλίου αυτού είναι ότι η παρουσίαση της θεωρίας περιορίζεται συχνά, για να αφήσει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν, με τη βοήθεια των καθηγητών τους, τη διαίσθηση, τη δοκιμή, την έρευνα και τέλος την αναγκαία σύνθεση.

Οι δραστηριότητες που προτείνονται και προηγούνται της θεωρίας, έχουν στόχο να υπάρξει ο προβληματισμός και η αναζήτηση που θα μας οδηγήσει στην ανάγκη να αναπτύξουμε την κατάλληλη θεωρία. Έτσι, γίνεται φανερό ότι η θεωρία είναι αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης αναζήτησης και όχι αυτοσκοπός. Οδηγός σ’ αυτό το βηματισμό θα είναι και πάλι ο συνάδελφος καθηγητής του Γυμνασίου, που χωρίς τη δική του ουσιαστική συμβολή τίποτα δεν ολοκληρώνεται.

Πιστεύουμε ότι οι γονείς των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου γνωρίζουν καλά, ότι σ’ αυτή την ηλικία το σημαντικότερο δεν είναι η συνεχής συσσώρευση γνώσεων - που φαίνονται ατελείωτες και συχνά μένουν στείρες - αλλά ο τρόπος που αποκτάται σε κάθε περίπτωση η απαραίτητη γνώση. Αν στον τρόπο αυτό προστεθεί και η μέθοδος εμπέδωσης και αξιοποίησής της, τότε αυτή η γνώση παίρνει διαστάσει του πολύτιμου αγαθού και της κοινωνικής αξίας, που παραμένει ο τελικός στόχος κάθε εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Στην εποχή μας, που όλα μεταβάλλονται ταχύτατα - και μαζί τους οι θεωρίες, οι απόψεις και οι θέσεις - κανείς δεν ισχυρίζεται ότι ένα σχολικό βιβλίο μπορεί να συνθέσει όλες τις απόψεις και να περιλάβει, στο σύνολό της, την εκπαιδευτική εμπειρία τόσων αιώνων.
Ως συγγραφείς του βιβλίου, θα είμαστε ευτυχείς αν οι συνάδελφοι καθηγητές αλλά και όλοι οι ενδιαφερόμενοι, στείλουν στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο τις κρίσεις και τις παρατηρήσει τους, ώστε να γίνει κατά το δυνατόν καλύτερο τούτο το βιβλίο. Το ποσοστό της “αλήθειας” που αυτό περιέχει θα διευρυνθεί όταν η προσπάθεια γίνει πιο συλλογική. Γι’ αυτή την “αλήθεια” που, όπως λέει ο Ελύτης:

“Αιώνες τώρα με ρωτούν οι μάγοι
μα οι αστέρες αποκρίνονται κατά προσέγγιση”.

Οι συγγραφείς

ΜΕΡΟΣ Α΄

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ
Ο ΣΑΜΙΟΣ
(580–500 π.Χ.)

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ
ΘΕΩΡΗΜΑ
ΕΛΛΑΣ – ΔΡΧ. 3.50

Φυσικοί Αριθμοί

1.1 Φυσικοί Αριθμοί - Διάταξη - Στρογγυλοποίηση

- *Κατανοώ τους φυσικούς αριθμούς*
- *Αντιστοιχίζω τους φυσικούς αριθμούς με σημεία του άξονα*
- *Συγκρίνω φυσικούς αριθμούς*
- *Στρογγυλοποιώ φυσικούς αριθμούς*

1.2. Πρόσθεση - Αφαίρεση και Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

- *Προσθέτω, αφαιρώ και πολλαπλασιάζω φυσικούς αριθμούς*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης*
- *Εκτελώ τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την προβλεπόμενη προτεραιότητα*

1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

- *Κατανοώ την έννοια της δύναμης αν και διαβάζω δυνάμεις*
- *Υπολογίζω δυνάμεις με μικρό εκθέτη και για τις δυνάμεις του 10 εφαρμόζω τις ισότητες:*
  $10^{\nu} = 10 \ldots 0$ *(ν μηδενικά),*
  $2 \cdot 10^{\nu} = 20 \ldots 0$ *(ν μηδενικά) κλπ.*
- *Εφαρμόζω την προτεραιότητα των πράξεων στον υπολογισμό παραστάσεων με δυνάμεις και παρενθέσεις*

1.4 Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

- *Γνωρίζω την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης*
- *Υπολογίζω το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης δύο ακεραίων και γράφω την ισότητα αυτής*
- *Κατανοώ ότι οι εκφράσεις: "Ο Δ είναι πολλαπλάσιο του δ", "Ο δ είναι διαιρέτης του Δ" και "Ο Δ διαιρείται με τον δ" είναι ισοδύναμες με την έκφραση: "Η ευκλείδεια διαίρεση του Δ με τον δ είναι τέλεια"*

1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας - Μ.Κ.Δ. - Ε.Κ.Π. - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- *Γνωρίζω ποιοι αριθμοί λέγονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι*
- *Γνωρίζω και χρησιμοποιώ τα κριτήρια διαιρετότητας με το 2, το 4, το 5 και το 10 καθώς και με το 3 και το 9*
- *Αναλύω δύο ή περισσότερους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και βρίσκω μ' αυτόν τον τρόπο το Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. αυτών*

- Θέλεις να έχεις ή να ξέρεις; ρώτησε ο θείος τον ανιψιό του λίγο πριν τον αποχαιρετήσει στο αεροδρόμιο.
Το αγόρι κοίταξε το θείο του με μεγάλη απορία προσπαθώντας να καταλάβει τι εννοούσε με την ερώτηση του.
- Θέλεις να έχεις πράγματα ή να ξέρεις γι' αυτά; συμπλήρωσε ο θείος του. Πριν ακόμα προλάβει το παιδί να απαντήσει, ο θείος του συνέχισε:
- Περάσαμε όμορφα στις διακοπές. Τώρα είναι Σεπτέμβριος, εγώ γυρίζω στη δουλειά μου κι εσύ αρχίζεις το Γυμνάσιο. Θα σε ξαναδώ του χρόνου το καλοκαίρι και θα είσαι ένα χρόνο και μία τάξη μεγαλύτερος. Έπιασε το αγόρι από τους ώμους και κοιτώντας το στα μάτια πρόσθεσε:
- Δε θέλω να μου απαντήσεις τώρα. Θα σε ξαναρωτήσω του χρόνου. Έχεις, λοιπόν, καιρό να το ψάξεις, να κάνεις υποθέσεις, να φτιάξεις ιστορίες και πιθανά σενάρια, να σκεφτείς. Κυρίως αυτό: να σκεφτείς, είπε, σφίγγοντάς του τα χέρια.
"Παρακαλούνται οι επιβάτες της πτήσης για Παρίσι να προσέλθουν στον έλεγχο των εισιτηρίων", ακούστηκε η αναγγελία από τα μεγάφωνα.
- Και κοίτα, αν δεν έχεις σίγουρη απάντηση, δεν πειράζει. Η διαδρομή αυτή μπορεί να αξίζει περισσότερο. Το μυαλό μπορεί να φτιάξει μόνο του έναν ολόκληρο κόσμο. "Καλή πορεία, αγόρι μου"
- Καλό ταξίδι, θείε…

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΑΞΗ

Η τάξη είναι η ίδια ένα ταξίδι. Είναι μια διαδρομή από σκέψη σε σκέψη, από μία γνώμη σε μια άλλη, από μια έκφραση σε ένα συλλογισμό. Απόψεις που συμφωνούν, γνώμες που είναι διαφορετικές, ιδέες που διαμορφώνονται, συνθέτουν νέες γνώσεις και προσθέτουν εμπειρίες. Η θεωρία αναπτύσσεται μετά από το σχετικό προβληματισμό και το διάλογο που γίνεται μέσα στην τάξη. Είναι η τελική θέση στην οποία καταλήγουμε, αφού δοκιμάσουμε και επαληθεύσουμε τη σκέψη μας. Ακριβώς γι' αυτό προηγούνται οι σχετικές δραστηριότητες. Μέσα απ' αυτές θα προβληματιστούμε και θα εκφράσουμε την άποψή μας. Δε σημαίνει ότι σε όλα θα έχουμε απαντήσεις και ότι όλα θα τα μπορέσουμε μόνοι μας. Γι' αυτό είναι και οι άλλοι. Αρκεί να μάθουμε ν' ακούμε τη γνώμη τους. Η σκέψη την άλλων θα πάει τη δική μας ένα βήμα παραπέρα. Σ' αυτό μας συντονίζει και μας βοηθάει ο καθηγητής μας. Όλοι μαζί και ομαδικά θα καταφέρουμε περισσότερα. Ας αρχίσουμε λοιπόν.

Α.1.1. Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη Φυσικών – Στρογγυλοποίηση

Από το Δημοτικό σχολείο μάθαμε την έννοια του φυσικού αριθμού. Στην παράγραφο αυτή γίνεται επανάληψη της έννοιας, της διάταξης και της στρογγυλοποίησης των φυσικών αριθμών. Μέσα από τις δραστηριότητες, που ακολουθούν, θα προσπαθήσουμε να ξαναθυμηθούμε αυτά που έχουμε μάθει και να τα διατυπώσουμε με πιο οργανωμένη σκέψη.

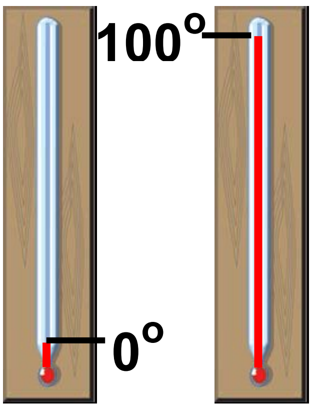
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Διάλεξε ένα τριψήφιο αριθμό. Βρες όλους τους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς που προκύπτουν όταν εναλλάξεις τα ψηφία του αριθμού που διάλεξες και γράψε αυτούς με όλους τους δυνατούς τρόπους.

- ***Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος;***
- ***Γράψε όλους τους αριθμούς που βρήκες με σειρά αύξουσα, δηλαδή από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.***
- ***Στη συνέχεια, γράψε τους ίδιους αριθμούς με φθίνουσα σειρά.***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Για να βαθμολογήσουμε ένα θερμόμετρο ακολουθούμε μια συγκεκριμένη μέθοδο: Το αφήνουμε στον πάγο αρκετή ώρα και στο σημείο που θα σταθεί ο υδράργυρος σημειώνουμε το μηδέν (0^o). Στη συνέχεια το αφήνουμε μέσα σε νερό που βράζει και στο σημείο που θα σταθεί ο υδράργυρος σημειώνουμε το εκατό (100^o).



► *Σκέψου και διατύπωσε ένα τρόπο με τον οποίο θα μπορούσες να σημειώσεις και όλες τις ενδιάμεσες ενδείξεις.*

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

• Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …, 98, 99, 100, …, 1999, 2000, 2001, … ονομάζονται φυσικοί αριθμοί.

► Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και ένα προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1.

◆ Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τους άρτιους ή ζυγούς και τους περιττούς ή μονούς.

• Άρτιοι λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2 και περιττοί εκείνοι που δεν διαιρούνται με το 2.

◆ Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης δίνει τη δυνατότητα να σχηματίζουμε το απεριόριστο πλήθος των φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας μόνο τα δέκα γνωστά ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

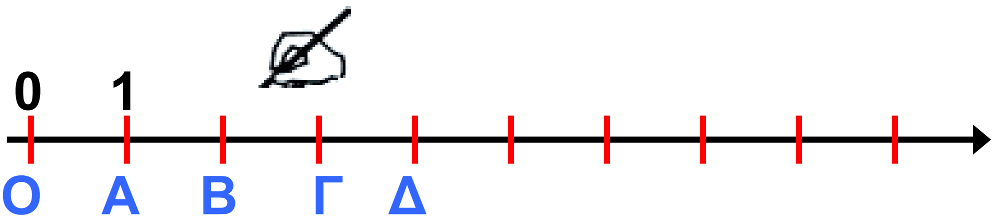
► Η δυνατότητα αυτή υπάρχει γιατί η αξία ενός ψηφίου καθορίζεται και από τη θέση που κατέχει, δηλαδή τη δεκαδική τάξη του (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες, δεκάδες χιλιάδες, εκατοντάδες χιλιάδες, ...).

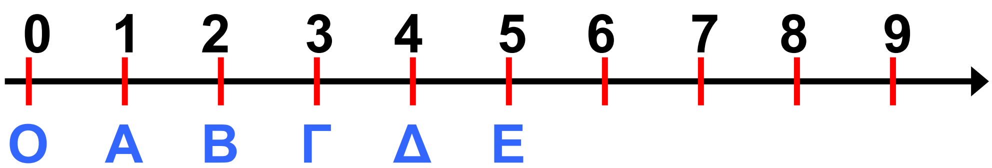
• Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα:
το = που σημαίνει "ίσος με",
το < που σημαίνει "μικρότερος από" και
το > που σημαίνει "μεγαλύτερος από".

► Μπορούμε πάντα να συγκρίνουμε δύο φυσικούς αριθμούς μεταξύ τους. Επομένως έχουμε τη δυνατότητα να διατάξουμε τους φυσικούς αριθμούς από το

μικρότερο προς το μεγαλύτερο, δηλαδή με αύξουσα σειρά μεγέθους.
Για παράδειγμα: 0<1<2<3< .... <10<11<12< … <297< … <1000< …

◆ **Η δυνατότητα αυτή, της διάταξης των φυσικών αριθμών, επιτρέπει να τους τοποθετήσουμε πάνω σε μια ευθεία γραμμή με τον παρακάτω τρόπο: Διαλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο Ο της ευθείας, που το λέμε αρχή, για να παραστήσουμε τον αριθμό 0. Μετά, δεξιά από το σημείο Ο διαλέγουμε ένα άλλο σημείο Α, που παριστάνει τον αριθμό 1. Τότε, με μονάδα μέτρησης το ΟΑ, βρίσκουμε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς: 2, 3, 4, 5, …**





Στρογγυλοποίηση

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Στις 13 Ιουνίου 2004, ακούστηκε στις ειδήσεις ότι από τα 450 εκατομμύρια πολιτών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, ψηφίζουν τα 338 εκατομμύρια για να εκλέξουν 732 βουλευτές του Ευρωκοινοβουλίου.

► ***Γιατί δεν αναφέρθηκε το ακριβές πλήθος των 454.018.512 πολιτών της Ε.Ε., καθώς και ο ακριβής αριθμός των 337.922.145 που είχαν δικαίωμα ψήφου;***

► ***Γιατί, αντίθετα, στην περίπτωση των 732 ευρωβουλευτών, αναφέρθηκε ο ακριβής αριθμός;***

► ***Πότε επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε αυτή τη διαδικασία προσέγγισης ενός φυσικού αριθμού;***

Σκεφτόμαστε

Η δραστηριότητα αυτή μας οδηγεί να προβληματιστούμε γιατί σε αριθμούς, όπως το ακριβές πλήθος των πολιτών της Ε.Ε., δε χρειάζεται να αναφερθούμε με ακρίβεια, ενώ σε άλλους, όπως ο αριθμός των ευρωβουλευτών, απαιτείται ακρίβεια. Πότε, γενικότερα, η ακριβής διατύπωση ενός αριθμού είναι αναγκαία;
Στην περίπτωση του πλήθους των πολιτών ή των ψηφοφόρων της Ε.Ε., αυτό που κυρίως ενδιαφέρει είναι η “τάξη μεγέθους”, π.χ. τα εκατομμύρια. Ενώ για τους ευρωβουλευτές ο ακριβής αριθμός είναι απαραίτητος, π.χ. στις ψηφοφορίες.
Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι χρειάζεται μια διαδικασία που μας βοηθάει να εκφράσουμε, με τρόπο κοινά αποδεκτό, ένα φυσικό αριθμό για τον οποίο δεν απαιτείται ακρίβεια.
Για παράδειγμα το ύψος ενός βουνού που είναι 1987 m, λέμε, συνήθως, 2000 m. Ενώ ο αριθμός ενός τηλεφώνου, το ΑΦΜ ή ο ταχυδρομικός κωδικός αναφέρονται πάντα με ακρίβεια.

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

● **Πολλές φορές αντικαθιστούμε ένα φυσικό αριθμό με μια προσέγγιση του, δηλαδή κάποιο άλλο λίγο μικρότερο ή λίγο μεγαλύτερό του. Τη διαδικασία αυτή την ονομάζουμε στρογγυλοποίηση.**

◆ **Για να στρογγυλοποιήσουμε ένα φυσικό αριθμό:**

- Προσδιορίζουμε τη τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.

- Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.

- Αν αυτό είναι μικρότερο του 5 (δηλαδή 0, 1, 2, 3 ή 4), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.

- Αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5 (δηλαδή 5, 6, 7, 8 ή 9), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 9.573.842 στις (α) εκατοντάδες, (β) χιλιάδες (γ) εκατομμύρια.

Λύση

(α) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* εκατοντάδες.
Προηγούμενη τάξη: *4 < 5*. Όλα τα προς τα δεξιά ψηφία μηδενίζονται. ***9.573.842 → 9.573.800***

(β) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* χιλιάδες
Προηγούμενη τάξη: *8 > 5*. Όλα τα προς τα δεξιά ψηφία μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης γίνεται: *3 + 1 = 4* ***9.573.842 → 9.574.000***

(γ) Τάξη στρογγυλοποίησης: **εκατομμύρια**
Προηγούμενη τάξη: 5 = 5. Όλα τα προς τα δεξιά ψηφία μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης γίνεται *9 + 1 = 10*

9.573.842 → 9.573.800

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. ***Γράψε με ψηφία τους αριθμούς που δίνονται παρακάτω σε φυσική γλώσσα: (α)*** **διακόσια πέντε,** ***(β)*** **επτακόσια τριάντα δύο** ***(γ)*** **είκοσι χιλιάδες οκτακόσια δέκα τρία.**

2. ***Γράψε σε φυσική γλώσσα τους αριθμούς: (α)*** **38.951,** ***(β)*** **5.000.812,** ***(γ)*** **120.003.**

3. ***Ποιοι είναι οι τρεις προηγούμενοι αριθμοί του 289 και ποιοι οι δύο επόμενοι;***

4. ***Τοποθέτησε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:*** **3.515, 4.800, 3.620, 3.508, 4.801.**

5. ***Τοποθέτησε το κατάλληλο σύμβολο: <, =, >, στο κενό μεταξύ των ακόλουθων αριθμών:***
(α) **45 … 45** ***(β)*** **38 … 36,** ***(γ)*** **456 … 465,**
(δ) **8.765 … 8.970,** ***(ε)*** **90.876 … 86.945,** ***(στ)*** **345 … 5.690**

6. ***Κατασκεύασε έναν άξονα με αρχή το σημείο Ο και μονάδα ΟΑ ίσο με 2 cm. Τοποθέτησε τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε σε αποστάσεις 6 cm, 10 cm, 12 cm και 14 cm αντίστοιχα. Ποιοι αριθμοί αντιστοιχούν στα σημεία αυτά;***

7. ***Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος.***

☐ ***(α) Ένας πενταψήφιος αριθμός έχει 6 ψηφία και με πρώτο ψηφίο το 0.***

(β) Στον αριθμό 5780901 το μηδέν δηλώνει απουσία δεκάδων και χιλιάδων

(γ) Δέκα χιλιάδες είναι μία δεκάδα χιλιάδα

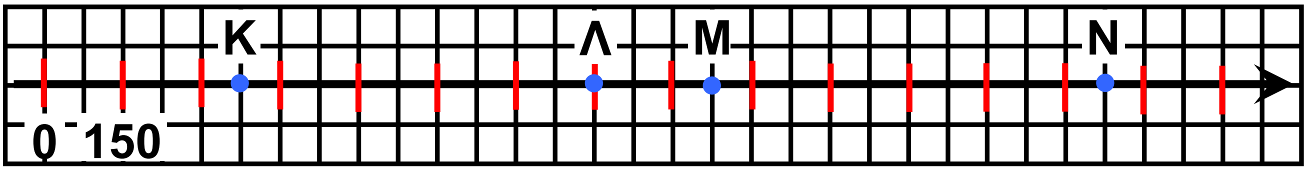
(δ) Σε μια πενταήμερη εκδρομή θα γίνουν πέντε διανυχτερεύσεις

(ε) Από τον αριθμό 32 ως τον αριθμό 122 υπάρχουν 90 αριθμοί

(στ) Σε οκτώ ημέρες από σήμερα, που είναι Πέμπτη, θα είναι Παρασκευή

(ζ) Από την 12η σελίδα του βιβλίου μέχρι και την 35η είναι 24 σελίδες

Οι επόμενες τέσσερις ερωτήσεις αναφέρονται στο παρακάτω σχήμα



(η) Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός μεταξύ των αριθμών 2 και 3

(θ) Στο σημείο K αντιστοιχεί ο αριθμός 370

(ι) Στο σημείο Λ αντιστοιχεί ο αριθμός 1050

(ια) Στο σημείο M αντιστοιχεί ο αριθμός 1200

(ιβ) Στο σημείο N αντιστοιχεί ο αριθμός 1875

8. Στρογγυλοποίησε στην πλησιέστερη εκατοντάδα τους αριθμούς: 345, 761, 659, 2.567, 9.532, 123.564, 34.564, 31.549 και 8.765.

9. Στρογγυλοποίησε τον αριθμό 7.568.349 στις πλησιέστερες: (α) δεκάδες, (β) εκατοντάδες, (γ) χιλιάδες, (δ) δεκάδες χιλιάδες, (ε) εκατοντάδες χιλιάδες.

Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τις «πράξεις» των φυσικών αριθμών. Το ουσιαστικό «πράξη» προκύπτει από το ρήμα «πράττω» και δηλώνει μια δράση ή ενέργεια. Οι αριθμοί που έχουμε γνωρίσει μέχρι τώρα υλοποιούν ανάγκες μέτρησης. Σύνθετες μετρήσεις προκύπτουν από απλές μετρήσεις με την διαδικασία των πράξεων, όπως για παράδειγμα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα αθροίσματα, δηλαδή τα αποτελέσματα της πρόσθεσης των μονοψήφιων φυσικών αριθμών.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

- ► ***Τι παρατηρείς για την πρόσθεση με το 0;***
- ► ***Πόσοι αριθμοί μπορούν να προστεθούν κάθε φορά;***
- ► ***Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 12 και διαφορά 2. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς αυτούς;***

► *Σύγκρινε τα αθροίσματα* 3 + 6 *και* 6 + 3 *και μετά τα αθροίσματα* (5 + 4) + 2 και 5 + (4 + 2).
► *Διατύπωσε τα συμπεράσματά σου.*
► *Φτιάξε ένα παρόμοιο πίνακα για τον πολλαπλασιασμό, διατύπωσε τα αντίστοιχα ερωτήματα και προσπάθησε να δώσεις τις κατάλληλες απαντήσεις.*

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά μπορούμε να προσθέσουμε δύο μόνο αριθμούς, συνεπώς από τα ζευγάρια των αριθμών που έχουν άθροισμα 12, δηλαδή 9 + 3, 8 + 4, 1 + 5, 6 + 6, εκείνο που έχει διαφορά 2 είναι το ζευγάρι των αριθμών 7 και 5.
Επίσης, παρατηρούμε ότι: 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 0 + 2 = 2 + 0 = 2, 0 + 3 = 3 + 0 = 3, κ.ο.κ.
Η σύγκριση των αθροισμάτων 3 + 6 = 9 και 6 + 3 = 9, όπως και άλλων τέτοιων αθροισμάτων π.χ. 7 + 1 = 8 και 1 + 7 = 8 κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της αντιμεταθετικής ιδιότητας.
Επίσης, η σύγκριση των αθροισμάτων: (5 + 4) + 2 = 11 και 5 + (4 + 2) = 11, αλλά και άλλων αθροισμάτων, όπως π.χ. (9 + 1) + 3 = 13 και 9 + (1 + 3) = 13 κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της προσεταιριστικής ιδιότητας. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης και αντίστοιχα του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Σε όλο το μήκος του εθνικού δρόμου Αθήνας-Αλεξανδρούπολης υπάρχουν χιλιομετρικές ενδείξεις. Οι ενδείξεις αυτές γράφουν: στη Λαμία 214, στη Λάρισα 362, στην Κατερίνη 445, στη Θεσσαλονίκη 514, στην

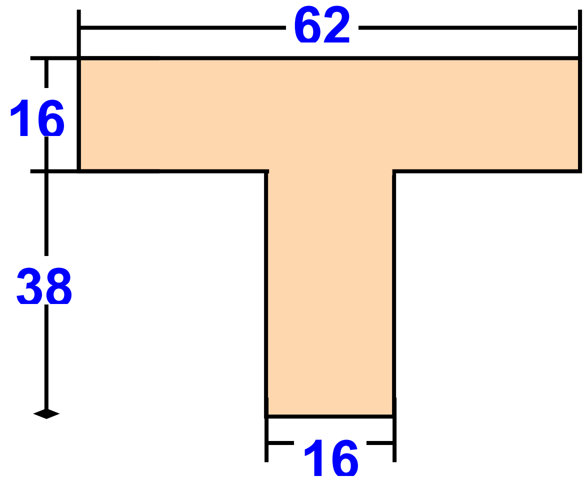
Καβάλα 677, στην Ξάνθη 732, στην Κομοτηνή 788 και στην Αλεξανδρούπολη 854.

► *Μπορείς να βρεις τις μεταξύ των πόλεων αποστάσεις;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ο Σπύρος υπολόγισε με το μυαλό του το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκε 1600 τετραγωνικά χιλιοστά.

► *Υπολόγισε και συ το εμβαδόν και δώσε μια εξήγηση για το τι ακριβώς έκανες για να το βρεις.*



Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

• Πρόσθεση είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς α και β, τους **προσθετέους**, βρίσκουμε ένα τρίτο φυσικό αριθμό γ, που είναι το **άθροισμά** τους και γράφουμε: α + β = γ

13 + 5 = 18

προσθετέοι — Άθροισμα

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

► Το 0 όταν προστεθεί σε ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

► Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος **(Αντιμεταθετική ιδιότητα).** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

► Μπορούμε να αντικαθιστούμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε ένα προσθετέο σε άθροισμα **(Προσεταιριστική ιδιότητα).** $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

• **Αφαίρεση** είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, Μ (**μειωτέος**) και Α (**αφαιρετέος**) βρίσκουμε έναν αριθμό Δ (**διαφορά**), ο οποίος όταν προστεθεί στο Α δίνει το Μ. $Μ = Α + Δ$ και γράφουμε $Δ = Μ - Α$

◆ **Στους φυσικούς αριθμούς ο αφαιρετέος Α πρέπει να είναι πάντα μικρότερος ή ίσος του μειωτέου Μ.** Σε αντίθετη περίπτωση η πράξη της αφαίρεσης δεν είναι δυνατόν να εκτελεστεί.

• **Πολλαπλασιασμός** είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς α και β, τους **παράγοντες**, βρίσκουμε ένα τρίτο φυσικό αριθμό γ, που είναι το γινόμενο τους: $\alpha \cdot \beta = \gamma$

$$7 \cdot 6 = 42$$

Παράγοντες
Γινόμενο

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

► Το <u>1</u> όταν πολλαπλασιαστεί με ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει. $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$

► **Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου (Αντιμεταθετική ιδιότητα)** $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

► **Μπορούμε να αντικαθιστούμε παράγοντες με το γινόμενό τους ή να αναλύουμε ένα παράγοντα σε γινόμενο (Προσεταιριστική ιδιότητα)** $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

► **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την πρόσθεση:** $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

► **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την αφαίρεση:** $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$

Η πρώτη εμφάνιση των συμβόλων + και – χρονολογείται από τα τέλη του 15ου αιώνα, αλλά η γενικευμένη χρήση τους εμφανίζεται τον 19ο αιώνα. Αρχικά για την αφαίρεση χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο «:». Λέγεται ότι η καταγωγή των συμβόλων αυτών οφείλεται στους εμπόρους που τα χρησιμοποιούσαν για να δηλώσουν ότι ένα βάρος βρέθηκε πιο πολύ ή πιο λίγο, αντίστοιχα, από το κανονικό. Τα σύμβολα x και = καθιερώθηκαν από Άγγλους μαθηματικούς το 1632 και το 1557 αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Να υπολογιστούν τα γινόμενα:*** **(α) 35 · 10, (β) 421 · 100, (γ) 5 · 1.000, (δ) 27 · 10.000**

Λύση

(α)	$35 \cdot 10$	=	350
(β)	$421 \cdot 100$	=	42.100
(γ)	$5 \cdot 1.000$	=	5.000
(δ)	$27 \cdot 10.000$	=	270.000

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι για να πολλαπλασιάσουμε ένα αριθμό επί 10, 100, 1.000, … γράφουμε στο τέλος του αριθμού τόσα μηδενικά όσα έχει κάθε φορά ο παράγοντας 10, 100, 1.000 …

2. ***Να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις:***
(α) $89 \cdot 7 + 89 \cdot 3$, (β) $23 \cdot 49 + 77 \cdot 49$,
(γ) $76 \cdot 13 – 76 – 3$, (δ) $284 \cdot 99$

Λύση

(α) $89 \cdot 7 + 89 \cdot 3 = 89 \cdot (7 + 3) =$
$89 \cdot 10 = 890$

(β) $23 \cdot 49 + 77 \cdot 49 =$
$(23 + 77) \cdot 49 = 100 \cdot 49 = 4.900$

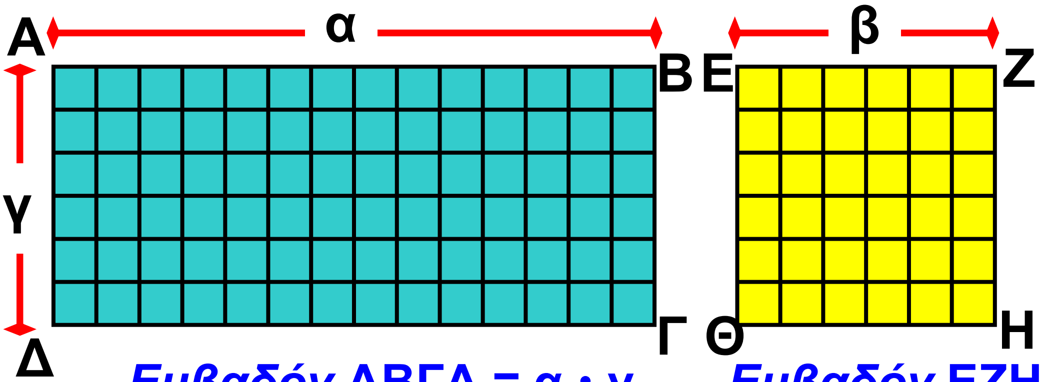
(γ) $76 \cdot 13 – 76 \cdot 3 = 76 \cdot (13 – 3) =$
$76 \cdot 10 = 760$

(δ) $284 \cdot 99 = 284 \cdot (100 – 1) =$
$284 \cdot 100 – 284 \cdot 1 = 28.400 – 284 = 28.116$

3. ***Να ερμηνευτούν με γεωμετρικό τρόπο οι επιμεριστικές ιδιότητες:***
$(α + β) \cdot γ = α \cdot γ + β \cdot γ$ και $(α – β) \cdot γ = α \cdot γ – β \cdot γ$

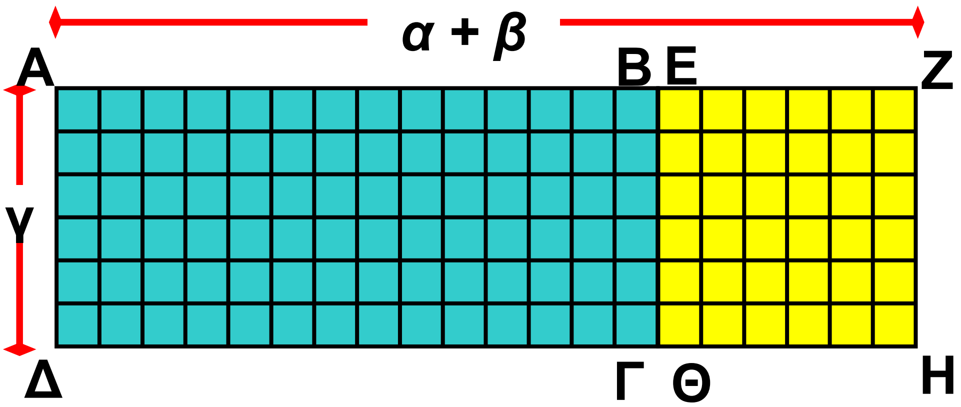
Λύση

Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα (μπλε και κίτρινο) έχουν μία διάσταση με το ίδιο μήκος γ.



***Εμβαδόν* ΑΒΓΔ = α • γ** ***Εμβαδόν* ΕΖΗΘ = β • γ**

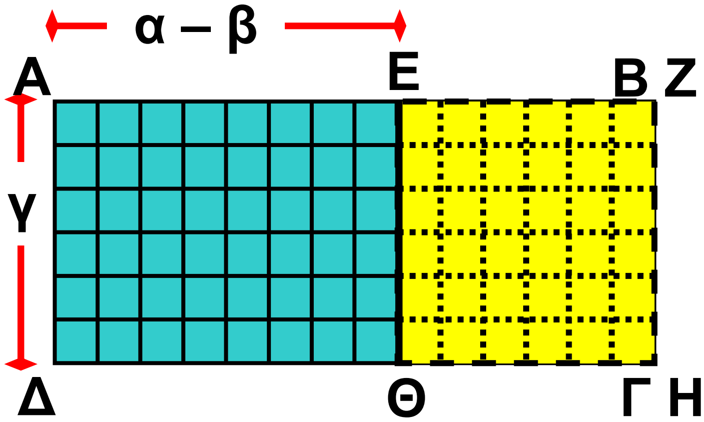
Για αυτό το λόγο μπορούμε, αν τα "κολλήσουμε", όπως φαίνεται στο σχήμα, να φτιάξουμε ένα τρίτο, το ΑΖΗΔ, με εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών τους.



***Εμβ.* ΑΖΗΔ = *Εμβ.* ΑΒΓΔ + *Εμβ.* ΕΖΗΘ**

Οπότε (α + β) • γ = α • γ + β • γ

Αν βάλουμε το μικρότερο πάνω στο μεγαλύτερο, όπως φαίνεται στο σχήμα, θα αποκτήσουμε ένα άλλο, το ΑΕΘΔ, που θα έχει εμβαδόν ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο αρχικών.



***Εμβ.* ΑΕΘΔ = *Εμβ.* ΑΒΓΔ – *Εμβ.* ΕΖΗΘ**

Οπότε (α – β) • γ = α • γ – β • γ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μερικές φορές ένας απλός συλλογισμός κάποιου ανθρώπου αξίζει πιο πολύ απ' όλο το χρυσάφι του κόσμου. Με κάποιες έξυπνες ιδέες κερδίζονται μάχες, γίνονται μνημειώδη έργα και δοξάζονται άνθρωποι, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται η επιστήμη, εξελίσσεται η τεχνολογία, διαμορφώνεται η ιστορία και αλλάζει η ζωή. Ένα μικρό παράδειγμα είναι η "έξυπνη πρόσθεση" που σκέφτηκε να κάνει ο Γκάους (Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1850), όταν σε ένα χωριό της Γερμανίας γύρω στα 1789, στην πρώτη τάξη του σχολείου, άρχισε να μαθαίνει για τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις. Όταν ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το άθροισμα:

1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100, ***πριν οι υπόλοιποι αρχίσουν τις πράξεις, ο μικρός Γκάους το είχε ήδη υπολογίσει. Ο δάσκαλος έκπληκτος τον ρώτησε πώς το βρήκε. Τότε εκείνος έγραψε στον πίνακα:***

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots$$
$$+ (48 + 53) + (50 + 51) =$$
$$\underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101}_{\text{50 φορές}} = 101 \cdot 50 = 5.050$$

Προσπάθησε να υπολογίσεις με τον τρόπο του Γκάους το άθροισμα **1 + 2 + 3 + … + 998 + 999 + 1000** ***και να μετρήσεις το χρόνο που χρειάστηκες. Πόσο χρόνο θα έκανες άραγε να το υπολογίσεις με κανονική πρόσθεση;***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. ***Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:***

***(α)* Η ιδιότητα α + β = β + α *λέγεται* ....**

***(β)* Η ιδιότητα α + β + γ = α + (β + γ) = (α + β) + γ *λέγεται* ....**

***(γ) Ο αριθμός που προστίθεται σε αριθμό και δίνει άθροισμα τον α είναι* ....**

***(δ)* Το αποτέλεσμα *της αφαίρεσης λέγεται* ....**

***(ε) Σε μια αφαίρεση οι αριθμοί* Μ, Α *και* Δ *συνδέονται με τη σχέση*: ....**

***(στ)* Η ιδιότητα α · β = β · α *λέγεται* ....**

***(ζ)* Η ιδιότητα α · (β · γ) = (α · β) · γ *λέγεται* ....**

***(η)* Η ιδιότητα α · (β + γ) = α · β + α · γ *λέγεται* ....**

2. ***Συμπλήρωσε τα γινόμενα:***

(α) **52 · $\square$ = 5.200,** ***(β)*** **37 · $\square$ = 370,**

(γ) **490 · $\square$ = 4.900.000**

3. ***Συμπλήρωσε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να προκύψουν σωστά αθροίσματα:***

(α)

$$\begin{array}{r} \square\,5\,8\,2 \\ +\ \ 7\,5\,\square\,1 \\ \hline \square\,1\,\square\,7\,3 \end{array}$$

(β)

$$\begin{array}{r} 4\,\square\,5 \\ +\ \ 5\,2\,\square \\ \hline \square\,\square\,1\,0 \end{array}$$

(γ)

$$\begin{array}{r} \square\,5\,\square\,5 \\ +\ \ 5\,2\,\square \\ \hline 4\,\square\,9\,3 \end{array}$$

4. ***Αντιστοίχισε κάθε γραμμή του πρώτου πίνακα με ένα από τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα.***

1 + 2 + 3 + 4	14
1 + 2 + 3 • 4	24
1 • 2 + 3 • 4	10
1 • 2 • 3 • 4	15

5. ***Τοποθέτησε ένα “ Χ” στην αντίστοιχη θέση***

(α) 157 + 33 = 190 ☐ 200 ☐ 180 ☐

(β) 122+25+78 = 200 ☐ 250 ☐ 225 ☐

(γ) 785 – 323 = 462 ☐ 458 ☐ 562 ☐

(δ) 7.321 – 4.595 = 2.724 ☐ 2.627 ☐ 2.726 ☐

(ε) 60 – (18 – 2) = 60 + 18 – 2 ☐ (60 – 18) – 2 ☐ 60 – 18 + 2 ☐

(στ) 52 – 11 – 9 = 52 – (11 + 9) ☐ (52 – 11) – 9 ☐ 52 – 20 ☐

(ζ) 23 • 10 = 230 ☐ 240 ☐ 2.300 ☐

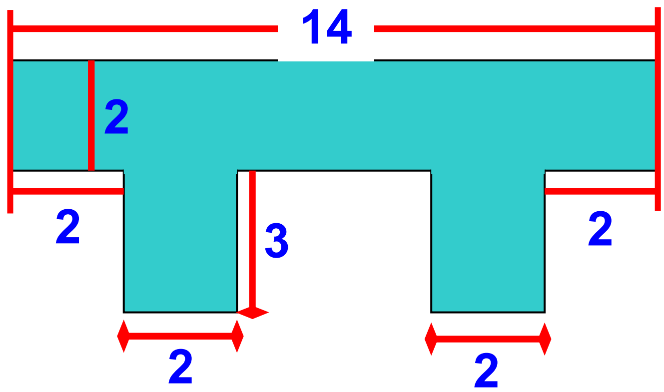
(η) 97 • 100 = 970 ☐ 9.700 ☐ 9.800 ☐

(θ) 879 • 1000 = 87.900 ☐ 879.000 ☐ 880.000 ☐

6. ***Υπολόγισε τα παρακάτω γινόμενα, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:***

(α) 3 • 13, (β) 7 • 11, (γ) 45 • 12, (δ) 12 • 101,
(ε) 5 • 110, (στ) 4 • 111, (ζ) 34 • 99, (η) 58 • 98.

7. ***Υπολόγισε το εμβαδόν του σχήματος, χρησιμο-ποιώντας κατάλληλα την επιμεριστική ιδιότητα.***

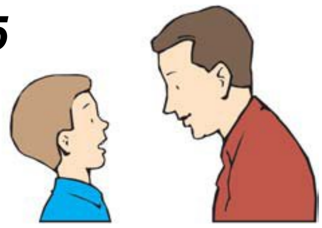


8. ***Αγοράσαμε διάφορα σχολικά είδη που κόστιζαν: 156 €, 30 €, 38 €, 369 € και 432 €. (α) Υπολόγισε πρόχειρα αν αρκούν 1.000 € για να πληρώσουμε τα είδη που αγοράσαμε.***
(β) Βρες πόσα ακριβώς χρήματα θα πληρώσουμε.

9. ***Ο Νίκος κατέβηκε για ψώνια με 160 €. Σε ένα μαγαζί βρήκε ένα πουκάμισο που κόστιζε 35 €, ένα παντελόνι που κόστιζε 48 € και ένα σακάκι που κόστιζε 77 €. Του φτάνουν τα χρήματα για να τα αγοράσει όλα;***

10. ***Σε ένα αρτοποιείο έφτιαξαν μία μέρα 120 κιλά άσπρο ψωμί, 135 κιλά χωριάτικο, 25 κιλά σικάλεως και 38 κιλά πολύσπορο. Πουλήθηκαν 107 κιλά άσπρο ψωμί, 112 κιλά χωριάτικο, 19 κιλά σικάλεως και 23 κιλά πολύσπορο. Πόσα κιλά ψωμί έμειναν απούλητα;***

***11.** Ο Άρης γεννήθηκε το 1983 και είναι 25 χρόνια μικρότερος από τον πατέρα του.*
(α) Πόσων χρονών είναι ο Άρης σήμερα;
(β) Πότε γεννήθηκε ο πατέρας του;



***12.** Ένα γκαράζ έχει 12 πατώματα. Τα 7 πατώματα έχουν 20 διπλές θέσεις και τα υπόλοιπα από 12 διπλές θέσεις. Στο γκαράζ μπήκαν 80 μοτοσικλέτες, 58 επιβατικά και 61 ημιφορτηγά. Επαρκούν οι θέσεις για όλα αυτά;*

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Αρχικά ο άνθρωπος έκανε μόνο το διαχωρισμό **ένα, δύο, πολλά**. *Με την πρόοδο του πολιτισμού, την ανάπτυξη των τεχνών και του εμπορίου διαμορφώνει τις έννοιες των αριθμών. Σ' αυτό βοήθησαν και τα* **φυσικά πρότυπα αρίθμησης**, *όπως π.χ. τα δάκτυλα του ενός χεριού (αρίθμηση βάση το 5) ή των δύο χεριών (βάση το 10). Μετά, τα πρώτα αυτά αριθμητικά συστήματα, συμπληρώνονται με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.*

Τα αποτελέσματα της αρίθμησης καταγράφονταν με τη βοήθεια χαραγών πάνω σε ξύλα ή κόκαλα ή με κόμπους σε σχοινιά. Το αρχαιότερο εύρημα ανάγεται στους προϊστορικούς χρόνους και είναι το κόκαλο ποδιού ενός μικρού λύκου μήκους 18 εκατοστών που βρέθηκε, το 1937, στην πόλη Βεστόνιτσε της Μοραβίας (εικόνα).

Η ανάγκη υπολογισμού μεγεθών απαιτεί σύγκριση με ένα σταθερό υπόδειγμα, **τη μονάδα μέτρησης**. *Οι πρώτες μονάδες αντιστοιχούν πάλι σε μέλη του σώματος, όπως παλάμες, δάχτυλους, πόδια, οργιά, πήχη. Από τα φυσικά πρότυπα, τις χαραγές, τους κόμπους, τα βότσαλα περάσαμε μέσα σε περίοδο χιλιάδων ετών στα* **σύμβολα που παρίσταναν αριθμούς**. *Τα σύμβολα αυτά ήταν διαφορετικά στους διάφορους αρχαίους πολισμούς. Η ενοποίηση του συμβολισμού των αριθμών που υπάρχει σήμερα χρειάστηκε χιλιάδες χρόνια για να γίνει.*

Η **ιστορία του μηδενός** *και ο συμβολισμός του ακολουθεί διαφορετική πορεία. Κι αυτό γιατί η ανάγκη ύπαρξης ξεχωριστού συμβόλου για το* **“τίποτα”** *εμφανίστηκε πολύ αργότερα.*

Οι **Σουμέριοι** *και οι* **Βαβυλώνιοι** *άφηναν ένα κενό διάστημα για να δηλώσουν την απουσία αριθμητικού ψηφίου σε κάποια θέση. Οι παρανοήσεις και τα λάθη που προέκυπταν τους οδήγησαν στην υιοθέτηση του ειδικού συμβόλου*  *ή*  *ή*  *κατά την Περσική περίοδο.*

Το σύμβολο αυτό το τοποθετούσαν μόνο μεταξύ δύο ψηφίων και όχι στο τέλος ενός αριθμού. Από τον 3ο - 12ο αιώνα μ.Χ. το μηδέν είναι μια κουκίδα. Ο μαθηματικός και αστρονόμος Βραχμαγκούπτα, το 628 μ.Χ. ονομάζει το μηδέν ως **“το τίποτα”**. *Τον 9ο αιώνα συναντάμε επιγραφή με σαφή συμβολισμό για το μηδέν.*

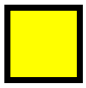
Οι **Ινδοί** *χρησιμοποιούν το σύμβολο του μηδενός και ως τελευταίο ψηφίο αριθμού. Έτσι είχαν 10 ισότιμα ψηφία τα: •* *ή* **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** *και* **9.**

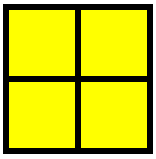
Ο Άραβας μαθηματικός Αλ-Χουαρίζμι (787 - 850 μ.Χ.), στο έργο του " Αλγόριθμοι των Ινδικών αριθμών" γράφει το 820 μ.Χ. για το μηδέν: **"Όταν μια αφαίρεση δεν αφήνει τίποτα, τότε, για να μη μείνει άδεια η θέση πρέπει να μπαίνει ένας μικρός κύκλος, γιατί διαφορετικά οι θέσεις θα λιγοστέψουν και μπορεί π.χ. η δεύτερη να θεωρηθεί ως πρώτη".**

Ο Έλληνας μαθηματικός **Κλαύδιος Πτολεμαίος** *(100 - 178 μ.Χ.) χρησιμοποιεί το σύμβολο 0 για να παραστήσει το μηδέν, στο βιβλίο του "Μεγάλη Μαθηματική Σύνταξη" ή* **"Αλμαγέστη"** *(150 μ.Χ.). Το επινόησε από το αρχικό γράμμα της λέξης* **"ουδέν"** *που σημαίνει* **κανένα** *(ψηφίο).*

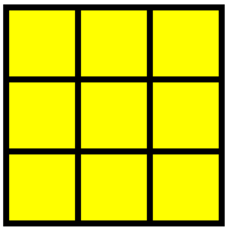
Α.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

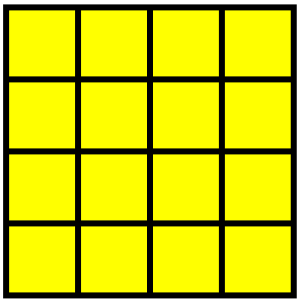
Από πόσα τετράγωνα  αποτελούνται τα τέσσερα πρώτα σχήματα και από πόσους κύβους  τα επόμενα τρία;



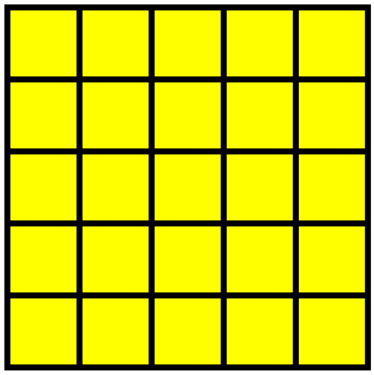
(1)



(2)



(3)



(4)

(5)

(6)

(7)

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι έχουμε:

(1) $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$, **(2)** $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$,

(3) $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$, **(4)** $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$

Και αντίστοιχα:

(5) $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, **(6)** $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$,

(7) $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

Οι περιπτώσεις (1) έως και (4) αφορούν τα **τετράγωνα** των φυσικών αριθμών 2, 3, 4 και 5. Οι περιπτώσεις (5) έως και (7) αφορούν τους **κύβους** των φυσικών αριθμών 2, 3 και 4.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

λές φορές συναντάμε γινόμενα των οποίων όλοι ιράγοντες είναι ίσοι. Στην περίπτωση αυτή, ιιμοποιούμε ονομασίες και συμβολικές εκφράσεις ς φαίνεται στα παρακάτω.

- Το γινόμενο α•α•α• … • α, που έχει ν παράγοντες ίσους με το α, λέγεται **δύναμη του α στη ν ή νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται με $α^ν$.

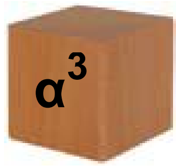
$$α^ν = \underbrace{α \cdot α \cdot α \cdot \ldots \cdot α}_{ν \text{ παράγοντες}}$$

- Ο αριθμός α λέγεται **βάση της δύναμης** και ο ν λέγεται **εκθέτης.**

- Η **δύναμη** του αριθμού στη δευτέρα, δηλαδή το $α^2$, λέγεται και **τετράγωνο του α.**

$α^2$

- Η **δύναμη** του αριθμού στην τρίτη, δηλαδή το $α^3$, λέγεται και **κύβος του α.**



► Το $α^1$, δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού α είναι **ο ίδιος ο αριθμός α.**

$α^1 = α$

◆ **Οι δυνάμεις του 1** δηλαδή το $1^ν$, είναι **όλες ίσες με 1.**

$1^ν = 1$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ο Κωστάκης, η Ρένα και ο Δημήτρης έκαναν τις πράξεις στην αριθμητική παράσταση:

4 • (7 + 7 • 9) + 20

και βρήκαν ο καθένας διαφορετικό αποτέλεσμα. Ο Κωστάκης βρήκε* 335*, η Ρένα* 300 *και ο Δημήτρης* 524*.

➢ ***Ποιος νομίζεις ότι έχει δίκιο; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.***

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

● **Αριθμητική παράσταση** λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

◆ Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση **(προτεραιότητα των πράξεων)** είναι η ακόλουθη:

1. Υπολογισμός **δυνάμεων.**
2. Εκτέλεση **πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων**
3. Εκτέλεση **προσθέσεων και αφαιρέσεων.**

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε **πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις** με την παραπάνω σειρά.

Η χρήση των παρενθέσεων ξεκίνησε από τον 17ο αιώνα με στόχο να υποδείξει την προτεραιότητα των πράξεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Να υπολογιστούν το τετράγωνο, ο κύβος, η τέταρτη, η πέμπτη και η έκτη δύναμη του αριθμού 10. Τι παρατηρείτε;***

Λύση

$$
\begin{aligned}
10^2 &= 10 \cdot 10 & &= 100 \\
10^3 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 &= 100 \cdot 10 &= 1000 \\
10^4 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &= 1.000 \cdot 10 &= 10.000 \\
10^5 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &= 10.000 \cdot 10 &= 100.000 \\
10^6 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &= 100.000 \cdot 10 &= 1.000.000
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι κάθε μία από τις δυνάμεις του 10, που υπολογίστηκαν, έχει τόσα μηδενικά όσος είναι και ο εκθέτης της δύναμης.
Για παράδειγμα: $10^6 = 1.000.000$ (έξι μηδενικά).

2. **Να εκτελεστούν οι πράξεις:**

(α) $(2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3 + 2)^2$ (β) $(2 + 3)^3 - 8 \cdot 3^2$

Λύση

(α) $(2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3 + 2)^2 = 10^4 + 4 \cdot 5^2 = 10.000 + 4 \cdot 25 = 10.000 + 100 = 10.100$

(β) $(2 + 3)^3 - 8 \cdot 3^2 = 5^3 - 8 \cdot 9 = 125 - 72 = 53$

3. **Να γραφεί το ανάπτυγμα του αριθμού 7.604 με χρήση των δυνάμεων του 10.**

Λύση

Είναι: $7.604 =$

$= 7$ *χιλ.* $+ 6$ *εκατ.* $+ 0$ *δεκ.* $+ 4$ *μον.*

$= 7 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4 \cdot 1$

$= 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4$

Η μορφή αυτή

$7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4$ **του αριθμού 7.604 είναι το ανάπτυγμα του αριθμού σε δυνάμεις του 10.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Συμπλήρωσε στον πίνακα τα τετράγωνα και τους κύβους των αριθμών:*

$α$	$α^2$	$α^3$
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		

$α$	$α^2$	$α^3$
15		
16		
17		
18		
19		
20		
25		

***2.** Γράψε με τη μορφή των δυνάμεων τα γινόμενα:*

(α) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ *(β)* $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ *(γ)* $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

(δ) $α \cdot α \cdot α \cdot α$ *(ε)* $x \cdot x \cdot x$ *(στ)* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot α \cdot α \cdot α$

***3.** Υπολόγισε τις δυνάμεις:*

$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^8,\ 2^9,\ 2^{10}.$

***4.** Βρες τα τετράγωνα των αριθμών:*

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 και 90.

5. *Βρες τους κύβους των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50.*

6. *Κάνε τις πράξεις:*

(α) $3 \cdot 5^2$, *(β)* $3 \cdot 5^2 + 2$, *(γ)* $3 \cdot 5^2 + 2^2$,
(δ) $3 \cdot 5 + 2^2$, *(ε)* $3 \cdot (5 + 2)^2$.

7. *Κάνε τις πράξεις: (α)* $3^2 + 3^3 + 2^3 + 2^4$,
(β) $(13 - 2)^4 + 5 \cdot 3^2$.

8. *Βρες τις τιμές των παραστάσεων:*
(α) $(6 + 5)^2$ *και* $6^2 + 5^2$, *(β)* $(3 + 6)^2$ *και* $3^2 + 6^2$.
Τι παρατηρείς;

9. *Γράψε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:*

(α) $\alpha + \alpha + \alpha$, *(β)* $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$,
(γ) $x + x + x + x$, *(δ)* $x \cdot x \cdot x \cdot x$

10. *Γράψε τους αριθμούς:*
(α) 34.720, (β) 123.654, (γ) 890.650
σε αναπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.

11. *Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με το εξαγόμενο των πράξεων κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.*

$(1 + 2) \cdot (3 + 4)$	20
$1 \cdot (2 + 3 \cdot 4)$	21
$(1 \cdot 2 + 3) \cdot 4$	9
$1 + (2 + 3) \cdot 4$	14

12. ***Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με την αριθμητική παράσταση κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.***

2 + 2 · 2	150
3 + 3 · 3	68
4 + 4 · 4 · 4	16
5 + 5 · 5 + 5 · 5	6
5 · 5 + 5 · 5 · 5	12
4 + 4 · 4 – 4	55

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. ***Χρησιμοποίησε μόνο τα σύμβολα των πράξεων: + και · και τις παρενθέσεις "(" και ")" για να συμπληρώσεις τις γραμμές ώστε να προκύψουν σωστές ισότητες.***

1	2	3	4	=	13
1	2	3	4	=	14
1	2	3	4	=	15
1	2	3	4	=	36

2. ***Συμπλήρωσε τα μαγικά τετράγωνα.***

20		18
	17	
		14

26		
27	25	23

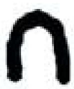
1	3	9
		18

18	36	72
		24

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι πιο παλιοί αριθμοί γράφτηκαν από τους **Σουμέριους** *σε πήλινα πινακίδια της 3ης - 2ης χιλιετηρίδας π.Χ. Οι αριθμοί γράφονταν από τα δεξιά προς τα αριστερά. Πρώτα οι μονάδες, μετά οι δεκάδες κ.λπ. Το 1854 ανακαλύφθηκαν κοντά στις όχθες του Ευφράτη, πήλινα πινακίδια γραμμένα στην περίοδο 2300 - 1600 π.Χ. από τους* **Βαβυλώνιους** *που χρησιμοποιούσαν και το δεκαδικό σύστημα.*

Οι **Αιγύπτιοι** *από το 3000 - 2500 π.Χ. είχαν ειδικά ιερογλυφικά για την παράσταση των αριθμών. Τα ειδικά σύμβολα που είχαν για να παριστά-νουν τις μονάδες κάθε δεκαδικής τάξης φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:*

						
1	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**	**100.000**	**1.000.000**

Τον 5ο αιώνα π.Χ. στην **Ιωνία** *δημιουργήθηκε το* **αλφαβητικό** *σύστημα αρίθμησης, που ήταν το τελειό-τερο σύστημα αρίθμησης μετά το αραβικό και έμεινε σε χρήση μέχρι και την Αναγέννηση, παράλληλα με το ρωμαϊκό. Σ' αυτό κάθε αριθμός από το 1 ως το 9, κάθε δεκάδα 10, 20, 30,…, 90, κάθε εκατοντάδα 100, 200, …, 900, συμβολίζονταν από ένα γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου με μια οξεία πάνω αριστερά για να τα ξεχωρίζουν από τα γράμματα των λέξεων. Επειδή χρειάζονταν 27 γράμματα για το συμβολισμό όλων αυτών των αριθμών και το αλφάβητο έχει μόνο 24, χρησιμοποίησαν ακόμη τρία σύμβολα το* **στίγμα** ϛ *που παρίστανε τον αριθμό 6, το* **κόππα** ϟ *που παρίστανε τον αριθμό 90 και το* **σαμπί** ϡ *που παρίστανε τον αριθμό 900. Έτσι είχαν:*

Για μεγαλύτερους αριθμούς είχαν μια μικρή γραμμή κάτω αριστερά, που δήλωνε ότι η αξία του γράμματος πολλαπλασιαζόταν επί 1.000. Δηλαδή:

͵δ = 4 x 1.000 = 4.000 και ͵η = 8 x 1.000 = 8.000.

Με το αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα γράφουμε: ͵βδ' για τον αριθμό 2004 και ω'λ'α' για τον 831.

Οι **Ρωμαίοι** *εισήγαγαν ένα δεκαδικό αριθμητικό σύστημα με ξεχωριστά σύμβολα για τους αριθμούς 1, 5, 10, 50, 100, 500 και 1000. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούσαν τα σύμβολα:*

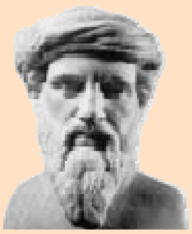
I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

$\overline{L}$	$\vert\overline{C}\vert$
50 x 1.000 = 50.000	100 x 100 x 1.000 = 10.000.000

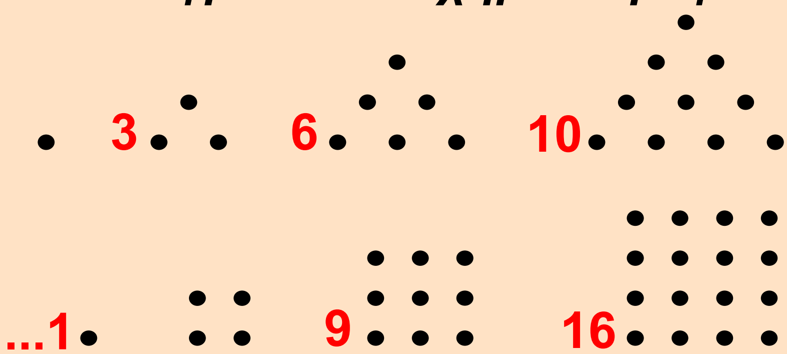
Στη γραφή των αριθμών τους χρησιμοποιούσαν την προσθετική αρχή από τα αριστερά προς τα δεξιά αλλά και την αφαιρετική αρχή. Το 2 γράφεται II*, το 3 γράφεται* III*, κ.λπ. Το 4 γράφεται* IV *(5-1), το 9 γράφεται* IX *(10-1), το 40 γράφεται* XL *(50-10), το 900 γράφεται* CM *(1.000-100), κ.λπ.*

Για πολλούς αιώνες κυριάρχησε το ελληνικό και το ρωμαϊκό σύστημα αρίθμησης. Το 1299 οι Κανονισμοί της "Τέχνης της Συναλλαγής" (Arte del Cambio) απαγόρευαν στους τραπεζίτες της Φλωρεντίας να χρησιμοποιούν τα Ινδοαραβικά αριθμητικά ψηφία και επέβαλαν τα ρωμαϊκά.

Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε σήμερα του **δεκαδικού συστήματος** *έφτασαν και διαδόθηκαν στην Ευρώπη μέσω των Αράβων, για το λόγο αυτό ονομάστηκαν* **Αραβικά***, αλλά είναι* **Ινδοαραβικά***, διότι από τα συστήματα αρίθμησης που υπήρχαν στους Άραβες, το δεκαδικό σύστημα ήρθε απ’ τους Ινδούς. Αυτό εμφανίζεται για πρώτη φορά στο έργο του Αλ-Χουαρίζμι (787 - 850 μ.Χ.) “Αλγόριθμοι των Ινδικών αριθμών”. Ήρθε στη Μέση Ανατολή με τα καραβάνια από την Περσία και την Αίγυπτο την περίοδο 224 - 641 μ.Χ. Οι τύποι Ινδικών συμβόλων είναι τα λεγόμενα* **“γκομπάρ”** *που χρησιμοποιούσαν οι Άραβες στην Ισπανία που την είχαν καταλάβει από το 711 μ.Χ.*



Οι αριθμοί είχαν αναχθεί από τη σχολή του **Πυθαγόρα** *σε θεμέλιο όλων των επιστημών. Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι όλοι οι νόμοι του σύμπαντος μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια των φυσικών αριθμών και των λόγων τους. Αυτή η τολμηρή υπόθεση εκφράζεται παραστατικά στην περίφημη θέση τους “τα πάντα είναι αριθμός”. Οι Πυθαγόρειοι είχαν αναπτύξει ένα ιδιότυπο τρόπο συμβολισμού των αριθμών με τη βοήθεια “ψήφων” διατεταγμένων στη μορφή κανονικών γεωμετρικών σχημάτων. Έτσι σχημάτιζαν ακολουθίες “τρίγωνων αριθμών”, που ήταν διατεταγμένοι σε σχήμα τριγώνων, τετράγωνων αριθμών, που ήταν διατεταγμένοι σε σχήμα τετραγώνων:*



Είδαμε ότι υπάρχουν αριθμητικά συστήματα που χρησιμοποιούν διαφορετικό αριθμό ψηφίων, όπως π.χ. είναι το δυαδικό αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιεί μόνο τα ψηφία 0 και 1. Στο δυαδικό σύστημα αντί για μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κ.λπ. έχουμε: μονάδες, δυάδες, τετράδες, οκτάδες, δεκαεξάδες κ.λπ. Έτσι στο τριαδικό σύστημα αρίθμησης αντίστοιχα θα χρησιμοποιούμε μόνο τρία ψηφία: 0, 1, 2, θα έχουμε μονάδες, τριάδες, εννιάδες κ.λπ.

Δεκαδικό	0	1	2	3	4	5	6	7
Δυαδικό	0	1	10	11	100	101	110	111
Τριαδικό	0	1	2	10	11	12	20	21

Δεκαδικό	8	9	10	11	12
Δυαδικό	1000	1001	1010	1011	1100
Τριαδικό	22	100	101	102	110

Δεκαδικό	13	14	15	16	…
Δυαδικό	1101	1110	1111	10000	…
Τριαδικό	111	112	120	121	…

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

► ***Με βάση την παραπάνω ιστορική αναδρομή κάνε ένα νοερό ταξίδι στο χρόνο προς το παρελθόν και φαντάσου ότι ζεις στη χώρα των Σουμερίων το 3000 π.Χ., των Αιγυπτίων από το 2500 π.Χ., των Ιώνων το 500 π.Χ., των Ρωμαίων το 1200 μ.Χ., των Ισπανών το 1300 μ.Χ., μέχρι την εποχή μας του 21ου αιώνα και γράψε δύο αριθμούς δικής σου επιλογής, όπως τους έγραφαν εκείνοι τότε.***

Α. 1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο καθηγητής φυσικής αγωγής πρέπει να αποφασίσει με ποιο τρόπο μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές του σχολείου για την παρέλαση.

- ***Μπορεί να φτιάξει πλήρεις τριάδες, τετράδες, πεντάδες, εξάδες ή επτάδες;***
- ***Πόσες από αυτές θα σχηματιστούν σε κάθε περίπτωση;***

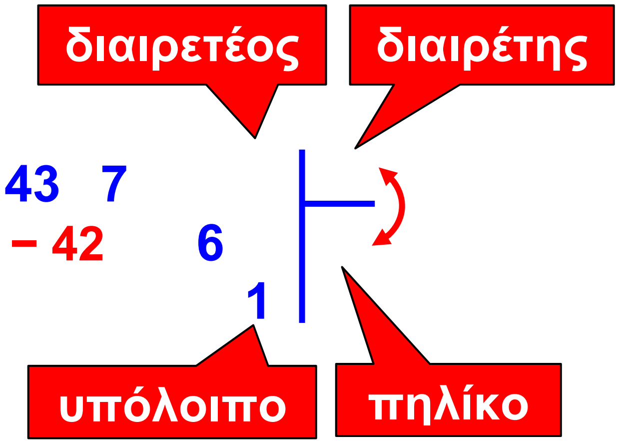
Σκεφτόμαστε

Για να αποφασίσει ο καθηγητής με ποιο τρόπο θα παρατάξει τους 168 μαθητές για την παρέλαση, πρέπει να διαιρέσει το 168 με τους αριθμούς 3, 4, 5, 6 και 7.
Παρατηρούμε ότι το 168 διαιρείται ακριβώς με το 3 και δίνει πηλίκο 56, οπότε μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές σε 56 τριάδες.
Παρόμοια, η διαίρεση του αριθμού 168 με τους αριθμούς 4, 6, και 7 δίνει τα πηλίκα: 42, 28 και 24 αντίστοιχα. Επομένως, μπορούν να παραταχθούν οι μαθητές σε 42 τετράδες ή 28 εξάδες ή σε 24 επτάδες. Τέλος, η διαίρεση του 168 με το 5 δίνει πηλίκο 33 και αφήνει υπόλοιπο 3. Άρα, δεν μπορεί ο καθηγητής να παρατάξει τους μαθητές σε πλήρεις πεντάδες.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ, έτσι ώστε να ισχύει: $\boxed{Δ = δ \cdot π + υ}$**

● Ο αριθμός Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός π ονομάζεται **πηλίκο** και το υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.



◆ Το υπόλοιπο είναι αριθμός πάντα μικρότερος του διαιρέτη: $\boxed{υ < δ}$

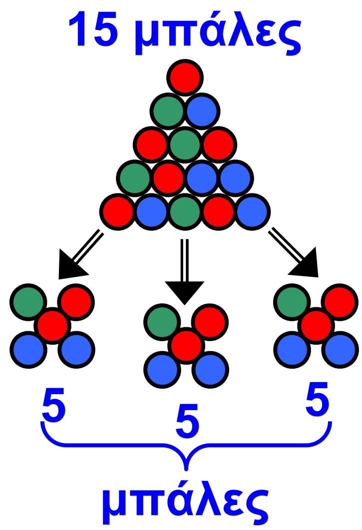
Δοκιμή

7 ← Διαιρέτης
x 6 ← Πηλίκο
42
\+ 1 ← Υπόλοιπο
43 ← Διαιρετέος

● Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.

● Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε λέμε ότι έχουμε μία **Τέλεια Διαίρεση**: $\boxed{Δ = δ \cdot π}$

◆ Στους φυσικούς αριθμούς η **τέλεια διαίρεση** είναι πράξη **αντίστροφη του πολλαπλασιασμού**, όπως είναι και η **αφαίρεση** πράξη **αντίστροφη της πρόσθεσης**.



► Ο διαιρέτης δ μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι 0. $δ \neq 0$

► Όταν Δ = δ, τότε το πηλίκο π = 1
$α : α = 1$

► Όταν ο διαιρέτης δ = 1, τότε το πηλίκο π = Δ $α : 1 = α$

► Όταν ο διαιρετέος Δ = 0, τότε το πηλίκο π = 0 $0 : α = 0$

Ονομάζουμε* "Ευκλείδεια Διαίρεση"** ***τη διαίρεση δυο αριθμών, προς τιμήν του **Ευκλείδη,** ***μεγάλου Έλληνα Μαθηματικού, ο οποίος έζησε περίπου από το 330 έως το 275 π.Χ. Μετά τις σπουδές του στην Αθήνα πήγε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, πόλη που αναδείχθηκε σε μεγάλο πολιτιστικό κέντρο του κόσμου εκείνης της εποχής με τη φροντίδα του Πτολεμαίου του Α΄. Το πιο σημαντικό έργο του Ευκλείδη είναι*** **"Τα Στοιχεία"** ***που αποτελούνται από 13 βιβλία και αποκρυσταλλώνουν την επιτυχημένη προσπάθεια του Ευκλείδη να αξιοποιήσει και να συστηματοποιήσει τις μαθηματικές γνώσεις της εποχής του.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν "Ευκλείδεια διαίρεση";

(α) 120 = 28 · 4 + 8 (β) 1.345 = 59 · 21 + 106

(γ) 374 = 8 · 46 + 6

Λύση

(α) Έχουμε *υ = 8*, που είναι μικρότερος από το 28 και μεγαλύτερος το 4. Άρα, είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη μόνο το 28 και όχι το 4.

(β) Έχουμε *υ = 106*, που είναι μεγαλύτερος από το 59 και από το 21. Άρα δεν είναι υπόλοιπο μιας Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 59 ή το 21.

(γ) Έχουμε *υ = 6*, που είναι μικρότερος από το 8 και από το 48. Άρα είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη είτε το 46 είτε το 8.

2. Σε μια δισκέτα μπορούν να αποθηκευτούν 11 φωτογραφίες. (α) Πόσες δισκέτες χρειάζονται για να αποθηκευτούν 5 φιλμ των 36 στάσεων το καθένα;
(β) Για πόσες φωτογραφίες θα μείνει χώρος στην τελευταία δισκέτα;

Λύση

(α) Τα 5 φιλμ των 36 στάσεων το καθένα έχουν συνολικά *5 • 36 = 180* φωτογραφίες. Η διαίρεση των 180 φωτογραφιών με τις 11 που μπορούν να αποθηκευτούν σε μια δισκέτα, έχει πηλίκο 16 και υπόλοιπο 4, δηλαδή έχουμε *180 = 11 • 16 + 4*.
Έτσι, χρειαζόμαστε 16 δισκέτες, περισσεύουν όμως 4 φωτογραφίες ακόμη, επομένως, θα πρέπει να πάρουμε επιπλέον μία δισκέτα, άρα θα χρειασθούν
***16 + 1=17* δισκέτες.**

(β) Αφού στην τελευταία δισκέτα θα αποθηκευτούν οι 4 φωτογραφίες, που περίσσεψαν, θα μείνει χώρος για *11 – 4 = 7* φωτογραφίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να κάνεις τις ακόλουθες διαιρέσεις και τις δοκιμές τους:
(α) 4002 : 69 (β) 1445 : 17, (γ) 925 : 37
(δ) 3621 : 213, (ε) 35280 : 2940, (στ) 5082 : 77.

2. Να υπολογίσεις: (α) Πόσο κοστίζει το 1 μέτρο υφάσματος αν τα 5 μέτρα κοστίζουν 65 €;
(β) Πόσο κοστίζει το 1 κιλό κρέας αν για τα 3 κιλά πληρώσαμε 30 €;
(γ) Πόσα δοχεία των 52 λίτρων θα χρειαστούν για 46.592 λίτρα κρασιού;

3. Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις:

(α) 125 = 35 · 3 + 20,
(β) 762 = 38 · 19 + 40,
(γ) 1500 = 42 · 35 + 30,
(δ) 300 = 18 · 16 + 12

4. Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, ποια μπορεί να είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης ν : 8;

5. Αν ένας αριθμός διαιρεθεί δια 9 δίνει πηλίκο 73 και υπόλοιπο 4. Ποιος είναι ο αριθμός;

6. Αν σήμερα είναι Τρίτη, τι μέρα θα είναι μετά από 247 ημέρες;

A.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - ΜΚΔ - ΕΚΠ - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Το τοπικό γραφείο της UNISEF θα μοιράσει 150 τετράδια, 90 στυλό και 60 γόμες σε πακέτα δώρων, ώστε τα πακέτα να είναι τα ίδια και να περιέχουν και τα τρία είδη.

- ***Μπορεί να γίνουν 10 πακέτα δώρων; Αν ναι, πόσα από κάθε είδος θα έχει κάθε πακέτο;***
- ***Πόσα πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με όλα τα διαθέσιμα είδη;***
- ***Πόσα πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με τα λιγότερα δυνατά από κάθε είδος;***

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

• **Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού α είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς.
0, α, 2α, 3α, 4α, …

► Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.

► Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.

► Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

● Το μικρότερο μη μηδενικό από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι μηδέν το ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.

● **Διαιρέτες** ενός φυσικού αριθμού **α** λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.

► **Κάθε αριθμός α έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και α.**

● Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος.**

● Δύο φυσικοί αριθμοί α και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** των α και β και συμβολίζεται ΜΚΔ (α, β).

● Δύο αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι ΜΚΔ (α, β) = 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

***1.** Δύο πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι. Το πρώτο ανά 3 ημέρες, το δεύτερο ανά 4 ημέρες. Αν ξεκίνησαν από το νησάκι ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού;*

Λύση

Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4.

Πολλαπλάσια του 3													
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...

Πολλαπλάσια του 4													
0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...

Οι αριθμοί 12, 24, 36, … είναι κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4. Επειδή, το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια είναι το 12, γράφουμε: ΕΚΠ (3, 4) = 12. Δηλαδή, ακριβώς μετά από 12 ημέρες θα ξαναβρεθούν τα δύο πλοία στο λιμάνι του νησιού και αυτό θα επαναλαμβάνεται κάθε 12 ημέρες.

2. Να αναλυθούν οι αριθμοί 2520, 2940, 3780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.

Λύση

Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη για το ΜΚΔ και τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη για το ΕΚΠ.

2520	2	διαιρώ με το 2
1260	2	»
630	2	»
315	3	διαιρώ με το 3
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

2940	2	διαιρώ με το 2
1470	2	»
735	3	διαιρώ με το 3
245	5	διαιρώ με το 5
49	7	διαιρώ με το 7
7	7	»
1		

$$2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

3780	2	διαιρώ με το 2
1890	2	»
945	3	διαιρώ με το 3
315	3	»
105	3	»
35	5	διαιρώ με το 5
7	7	διαιρώ με το 7
1		

$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

ΜΚΔ (2520, 2940, 3780) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

ΕΚΠ (2520, 2940, 3780) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 52920$

Κριτήρια Διαιρετότητας

• **Κριτήρια Διαιρετότητας με 2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25** λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.

► Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10**, αν λήγει σε **ένα μηδενικό.**

► Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.

► Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν λήγει σε 0 ή 5.

► Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων** του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.

► Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **4** ή το 25, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4 ή το 25 αντίστοιχα.

3. Να βρεθεί αν διαιρούνται οι αριθμοί 12510, 772, 225, 13600 με 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25, 100.

Λύση

	2	3	4	5	9	10	25	100
12.510	✓	✓	–	✓	✓	✓	–	–
772	✓	–	✓	–	–	–	–	–
225	–	✓	–	✓	✓	–	✓	–
13.600	✓	–	✓	✓	–	✓	✓	✓

4. Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 100.

2 3 5 7 19
11 17 13
23
43 31 37 41
73 47 29 59 71 61 79
97 83 89 53

Λύση

Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν ότι **δεν υπάρχει μέγιστος πρώτος αριθμός**, δηλαδή ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος. Γνώριζαν ακόμη ότι δεν υπάρχει ένας απλός κανόνας που να δίνει τους διαδοχικούς

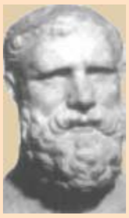
πρώτους αριθμούς. Με την απλή μέθοδο του Ερατοσθένη, γνωστή ως "Κόσκινο του Ερατοσθένη", που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από δοσμένο αριθμό.

Στον παρακάτω πίνακα διαγράφουμε τον αριθμό 1 που δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Μετά σημαδεύουμε το 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. Το ίδιο κάνουμε και με τους αριθμούς 3, 5 και 7. Μ' αυτόν τον τρόπο διαγράφονται όλοι οι σύνθετοι αριθμοί και μένουν μόνο οι πρώτοι, από το 1 έως το 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~



Ο **Ερατοσθένης** *(Κυρήνεια Λιβύης 276 π.Χ. - Αλεξάνδρεια 197 π.Χ.) διακρίθηκε ως Μαθηματικός, Φυσικός, Γεωγράφος, Αστρονόμος, Ιστορικός και Φιλόλογος. Από το 235 π.Χ. και επί 40 χρόνια, διετέλεσε διευθυντής της περίφημης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και δίδαξε στο Μουσείο της. Στα περίφημα* **"Γεωγραφικά"** *που παρουσίασε την πρώτη ακριβή μαθηματική μέτρηση της* **περιμέτρου (μεσημβρινού) της Γης,** *ως* **250.000 στάδια** *(=39.400 - 41.000 Km, έναντι της πραγματικής 40.000 Km) (Κλεομήδης, Στράβων). Επίσης, υπολόγισε την απόσταση της σελήνης* **780.000** *στάδια και του Ήλιου* **804.000.000** *στάδια.*
Μέτρησε την κλίση του άξονα της γης με μεγάλη ακρίβεια και έφτιαξε
ένα κατάλογο που περιελάμβανε **675** *αστέρες.*
Λάτρης της ταξινόμησης της ανθρώπινης γνώσης, ο Ερατοσθένης δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της μελέτης, που του επέβαλε η γεροντική τύφλωση και τελικά τερμάτισε τη ζωή του, σε ηλικία 82 ετών, με απεργία πείνας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8 είναι ο αριθμός …… και το ΕΚΠ (5, 8) = ……
(β) Αν το ΕΚΠ (α, β) = β, ο β είναι ……………………………… του α.

(γ) Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που ……………………………

……………………………………………………………………

και σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που ………………………

……………………………………………………………………

(δ) Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν

……………………………………………………………………

2. *Συμπλήρωσε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο ώστε, ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 9:*

(α) 6☐4, (β) 95☐4, (γ) 601☐.

3. *Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση*

(α)	ΕΚΠ (3, 5) =	8 ☐	9 ☐	15 ☐	30 ☐
(β)	ΕΚΠ (11, 6) =	17 ☐	36 ☐	66 ☐	132 ☐
(γ)	ΕΚΠ (5, 10) =	10 ☐	15 ☐	45 ☐	50 ☐
(δ)	ΕΚΠ (3, 2, 5) =	15 ☐	20 ☐	30 ☐	60 ☐
(ε)	ΕΚΠ (3, 6, 9) =	9 ☐	18 ☐	36 ☐	27 ☐
(στ)	ΕΚΠ (8, 12, 15) =	15 ☐	30 ☐	60 ☐	120 ☐

4. *Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 2 χρόνια ενώ η εταιρεία Β κάθε 3 χρόνια και η εταιρεία Γ κάθε 5 χρόνια. Αν το 2001 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα, πότε θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο;*

5. *Ένας γυμναστής παρατήρησε ότι όταν τοποθετεί τους μαθητές της α΄ γυμνασίου ανά 3, ανά 5 και ανά 7 δεν περισσεύει κανένας. Πόσοι ήταν οι μαθητές της α΄ γυμνασίου στο σχολείο αυτό, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους είναι μεταξύ 100 και 200;*

***6.** Ο Γιάννης πηγαίνει στον κινηματογράφο κάθε 10 ημέρες και ο Νίκος κάθε 12 ημέρες. Αν συναντήθηκαν στις 10 Μαρτίου στον κινηματογράφο, πότε θα ξανασυναντηθούν; Στο διάστημα μεταξύ των δύο συναντήσεων τους πόσες φορές έχει πάει ο καθένας τους χωριστά στον κινηματογράφο;*

***7.** Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση*

(α) ΜΚΔ (5, 8) =	1 ☐	5 ☐	8 ☐	40 ☐
(β) ΜΚΔ (16, 24) =	4 ☐	8 ☐	16 ☐	24 ☐
(γ) ΜΚΔ (30, 15) =	3 ☐	5 ☐	15 ☐	30 ☐
(δ) ΜΚΔ (10, 30, 60)=	5 ☐	10 ☐	30 ☐	60 ☐
(ε) ΜΚΔ (22, 32, 50)=	2 ☐	11 ☐	72 ☐	82 ☐

***8.** Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 24. Να δικαιολογήσεις γιατί έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες διαφορετικούς από τη μονάδα.*

***9.** Βρες τους διαιρέτες των αριθμών: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι; Ποιοι είναι σύνθετοι;*

***10.** Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος αριθμός ή σύνθετος και γιατί;*

***11.** Να βρεις όλους τους διαιρέτες των παρακάτω αριθμών: (α) 28, (β) 82, (γ) 95, (δ) 105, (ε) 124, (στ) 345, (ζ) 1.232, (η) 3.999.*

***12.** Να αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: (α) 78, (β) 348, (γ) 1.210, (δ) 2.344.*

Ανακεφαλαίωση

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: 1, 2, 3, 4, …

Άρτιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί που διαιρούνται με το **2**
Περιττοί αριθμοί είναι οι φυσικοί που δεν διαιρούνται με το **2**

Πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών

Πρόσθεση: $\alpha + \beta = \gamma$

α και **β** λέγονται **προσθετέοι** και το **γ** λέγεται **άθροισμα** των α και β.

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (*Αντιμεταθετική*)
- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (*Προσεταιριστική*)
- $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ *(το 0 δεν τον μεταβάλλει)*

Αφαίρεση: $\alpha - \beta = \gamma$, $\alpha > \beta$

Το α λέγεται **μειωτέος**, το β λέγεται *αφαιρετέος* και το γ λέγεται **διαφορά**.
Αν $\alpha - \beta = \gamma$ τότε $\alpha = \beta + \gamma$ ή $\alpha - \gamma = \beta$ • $\alpha - 0 = \alpha$

Πολλαπλασιασμός: $\alpha \cdot \beta = \gamma$

α και **β** λέγονται **παράγοντες** και το **γ** λέγεται **γινόμενο** των α και β.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ *(Αντιμεταθετική)*
- $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ (*Προσεταιριστική*)
- $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ *(το 1 δεν τον μεταβάλλει)*

Τέλεια Διαίρεση $\alpha : \beta = \gamma, \ \beta \neq 0$

Το α λέγεται διαιρετέος,
το β λέγεται διαιρέτης
και το γ λέγεται πηλίκο.

Αν $\alpha : \beta = \gamma$

τότε $\alpha = \beta \cdot \gamma$ **ή** $\alpha : \gamma = \beta$

• $\alpha : 1 = \alpha$ **και** $\alpha : \alpha = 1$ **και** $0 : \alpha = 0$

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση:

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Δύναμη:

$$\alpha^{\nu} = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \quad (\nu \text{ παράγοντες})$$

***Το α λέγεται* βάση *και το ν* εκθέτης**

Ευκλείδεια Διαίρεση: $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < \delta$

***Το Δ λέγεται* διαιρετέος, *το* δ διαιρέτης, *το* π πηλίκο *και το* υ υπόλοιπο**

Προτεραιότητα Πράξεων

1 **Δυνάμεις**

2 **Πολλαπλασιασμοί και Διαιρέσεις**

3 **Προσθέσεις και Αφαιρέσεις**

Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά

ΟΡΙΣΜΟΙ

• **Το μικρότερο μη μηδενικό από τα κοινά πολλαπλάσια** που έχουν δύο μη μηδενικοί αριθμοί λέγεται **ΕΚΠ** αυτών.

• **Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες** που έχουν δύο αριθμοί λέγεται **ΜΚΔ** αυτών.

• Ένας αριθμός α που έχει **διαιρέτες** μόνο τον α και το 1 λέγεται **πρώτος αριθμός**, αλλιώς λέγεται **σύνθετος**

• Δύο αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ** τους όταν
ΜΚΔ (α, β) = 1

Κριτήρια Διαιρετότητας:

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται:

► **με το 10, 100, 1000, ... αν λήγει σε 1, 2, 3,... μηδενικά**
► **με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0, 2, 4, 6, 8.**
► **με το 5, αν λήγει σε 0 ή 5**
► **με το 3 ή το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9**
► **με το 4 ή 25, αν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι αριθμός που διαιρείται με το 4 ή 25**

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Γράψε "Σ" ή "Λ" για κάθε σωστή ή λάθος πρόταση:

1. *Ισχύει ότι: (100 – 30) – 10 = 100 – (30 – 10)*
2. *Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με το 11 τον πολλαπλασιάζουμε με το 10 και προσθέτουμε 1.*
3. *Το γινόμενο 3 · 3 · 3 γράφεται* 3^3.
4. *Το* 2^5 *ισούται με 10.*
5. $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 4 \cdot \alpha$.
6. $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^5$.
7. $2^3 + 3 = 11$.
8. $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 = 322$.
9. $20 - 12 : 4 = 2$.
10. $9 \cdot 3 - 2 + 5 = 30$.
11. $(3 \cdot 1 - 3) : 3 = 0$.
12. *Στη σειρά των πράξεων: 7 + (6 · 5) + 4, οι παρενθέσεις δεν χρειάζονται.*
13. *Η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι πάντα περιττός αριθμός.*
14. *Αν ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του αριθμού β, τότε ο α διαιρείται με το β.*
15. *Το 38 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3.*

16. *Ο αριθμός 450 διαιρείται με το 3 και το 9.*

17. *Ο 35 και ο 210 έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον αριθμό 5.*

18. *Το ΕΚΠ των 2 και 24 είναι ο αριθμός 48.*

19. *Η διαίρεση 420 : 15 δίνει υπόλοιπο 18.*

20. *Η σχέση $177 = 5 \cdot 35 + 2$ είναι μια ευκλείδεια διαίρεση.*

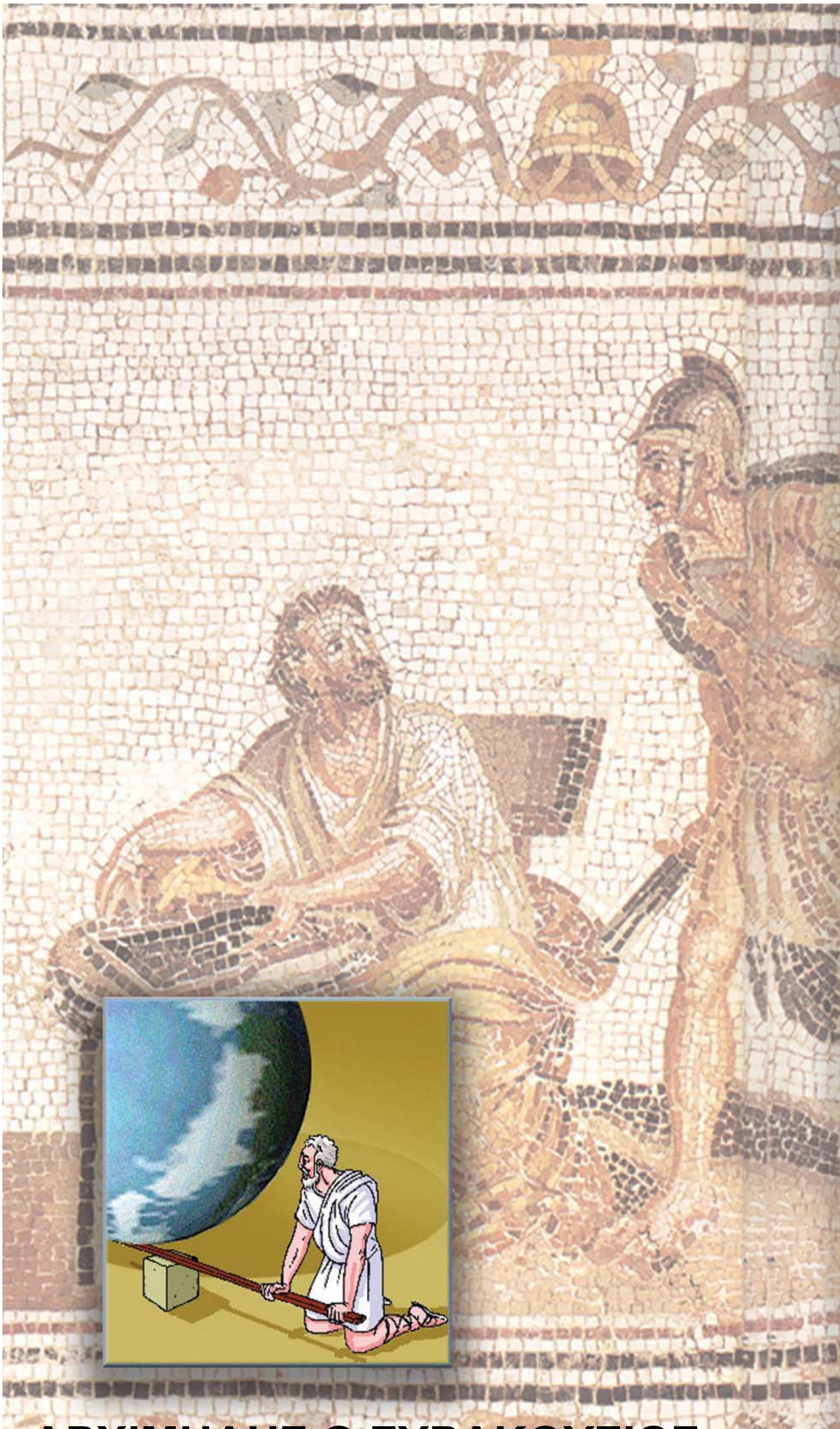
21. *Ο αριθμός $3 \cdot α + 9$ διαιρείται με το 3.*

22. *Ο αριθμός 300 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως $3 \cdot 10^2$.*

23. *Ο αριθμός 224 διαιρείται με το 4 και το 8.*

ΜΕΡΟΣ Α΄

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ Ο ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΣ
(287 – 212 π.Χ.)

Κλάσματα

2.1. Η έννοια του κλάσματος

- *Κατανοώ την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασίες χωρισμού του «όλου» σε μέρη*
- *Κατανοώ την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασία αναζήτησης σχέσης μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων.*
- *Υπολογίζω με τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα την τιμή ενός μέρους από το όλο.*
- *Υπολογίζω την τιμή του όλου από την τιμή ενός μέρους του.*

2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

- *Κατανοώ την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων.*
- *Απλοποιώ τα κλάσματα.*
- *Μετατρέπω κλάσματα σε ομώνυμα.*
- *Χρησιμοποιώ τη "χιαστί ιδιότητα" για τον έλεγχο της ισοδυναμίας των κλασμάτων:*

« Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ *τότε* $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$*»*

2.3. *Σύγκριση κλασμάτων*

- *Συγκρίνω κλάσματα.*
- *Λύνω σχετικά προβλήματα.*

2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

- *Προσθέτω και αφαιρώ κλάσματα.*
- *Λύνω σχετικά προβλήματα.*

2.5.Πολλαπλασιασμός κλασμάτων.

- ***Πολλαπλασιάζω κλάσματα*.**
- ***Βρίσκω τον αντίστροφο ενός αριθμού*.**
- ***Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων, τις διατυπώνω με τη βοήθεια των συμβόλων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης.***

2.6. Διαίρεση κλασμάτων.

- ***Κάνω διαίρεση κλασμάτων*.**

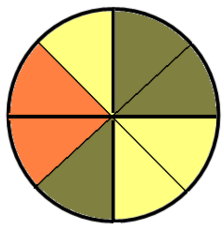
Α.2.1. Η έννοια του κλάσματος

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ένα βράδυ τρεις φίλοι αγοράζουν μια πίτσα και την χωρίζουν σε οκτώ κομμάτια. Ο ένας έφαγε το ένα, ο δεύτερος τα τρία και ο τρίτος δύο κομμάτια από αυτά που περίσσεψαν.

- *Μπορείς να βρεις το μέρος της πίτσας που έφαγε ο καθένας;*
- *Τι μέρος της πίτσας περίσσεψε;*

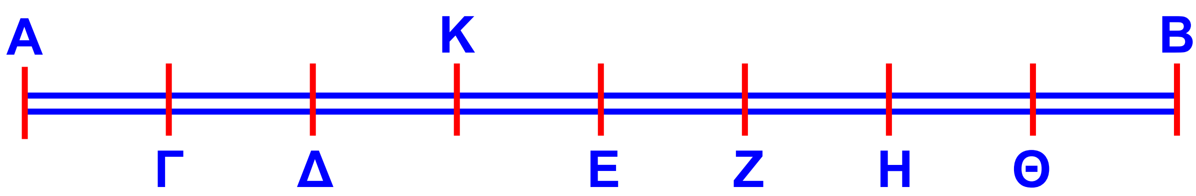
Σκεφτόμαστε



Αφού γνωρίζουμε ότι π.χ. ο πρώτος έφαγε το ένα κομμάτι από τα οκτώ της πίτσας, λέμε ότι έφαγε το $\frac{1}{8}$ της πίτσας. Τότε ο δεύτερος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ και ο τρίτος τα $\frac{2}{8}$ αυτής. Επομένως, και οι τρεις μαζί έφαγαν $1 + 3 + 2 = 6$ από τα οκτώ κομμάτια, δηλαδή τα $\frac{6}{8}$ της πίτσας. Άρα, περίσσεψαν τα υπόλοιπα δύο κομμάτια από τα οκτώ, δηλαδή τα $\frac{2}{8}$ της πίτσας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα, μπορείς να βρεις ποιο μέρος του μήκους του τμήματος ΑΒ είναι το μήκος του τμήματος ΑΚ;



➢ *Να υπολογίσεις το μήκος του ΑΚ, αν γνωρίζουμε ότι το ΑΒ είναι 32 cm;*

➢ *Να βρεις ζεύγη τμημάτων που το ένα να είναι:*

$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$ *του άλλου.*

Σκεφτόμαστε

(α) Το τμήμα ΑΒ είναι χωρισμένο σε 8 ίσα μέρη, συνεπώς ένα από αυτά είναι το $\frac{1}{8}$ του ΑΒ και το ΑΚ θα είναι ίσο με τα $\frac{3}{8}$ του ΑΒ.

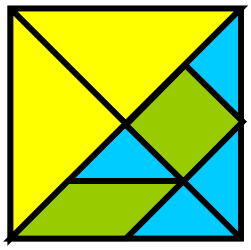
(β) Επειδή το ΑΒ είναι 32 cm, το $\frac{1}{8}$ αυτού θα είναι:
$\frac{1}{8} \cdot 32 \text{ cm} = \frac{32}{8} \text{ cm} = 4 \text{ cm}.$
Άρα το ΑΚ θα έχει μήκος: $3 \cdot 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$

(γ) Το μήκος του ΑΓ είναι το $\frac{1}{3}$ του ΑΚ και το $\frac{1}{2}$ του ΑΔ. Το ΑΔ είναι τα $\frac{2}{3}$ του ΑΚ και το ΑΚ τα $\frac{3}{2}$ του ΑΔ. Το ΑΕ είναι τα $\frac{4}{3}$ του ΑΚ και το ΑΚ τα $\frac{3}{4}$ του ΑΕ.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Στο διπλανό σχήμα ένα τετράγωνο έχει χωριστεί, ανάλογα με το χρώμα, σε τριών ειδών μέρη.

➢ *Μπορείς να βρεις τι κλάσμα του τετραγώνου είναι το καθένα μέρος του;*



Η λέξη "κλάσμα" προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη "κλάω" ή "κλω" πού σημαίνει κόβω, τεμαχίζω κάτι. Το κλάσμα λοιπόν δηλώνει ότι έχουμε ένα κομμάτι,

δηλαδή ένα μέρος κάποιου πράγματος. Στα Μαθηματικά θεωρούμε ότι αυτό που μοιράζεται μπορεί να χωριστεί σε ίσα μέρη. Έτσι, στα Μαθηματικά το “κλάσμα” πρέπει να δηλώνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε το ολόκληρο (τον “όλον”) και πόσα από αυτά πήραμε.

Κλάσμα: $\dfrac{\text{πόσα μέρη πήραμε}}{\text{σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε}} : \dfrac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$

Στη συνέχεια θα θυμηθούμε όσα ήδη έχουμε μάθει για τα κλάσματα και θα επεκτείνουμε τις γνώσεις μας στις πράξεις των κλασμάτων.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Όταν ένα μέγεθος ή ένα σύνολο ομοειδών αντικειμένων χωρισθεί σε ν ίσα μέρη, το κάθε ένα από αυτά ονομάζεται <u>νιοστό</u> και συμβολίζεται με το $\frac{1}{\nu}$.**

αριθμητής

κλασματική γραμμή

$\dfrac{2}{3}$

όροι του κλάσματος

παρονομαστής

διαβάζεται «δύο τρίτα»

- **Κάθε τμήμα του μεγέθους ή του συνόλου αντικειμένων, που αποτελείται από <u>κ</u> τέτοια ίσα μέρη, συμβολίζεται με το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ και διαβάζεται «κάπα νιοστά».**

$$\kappa \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu} \cdot \kappa = \frac{\kappa}{\nu} \qquad \nu \neq 0$$

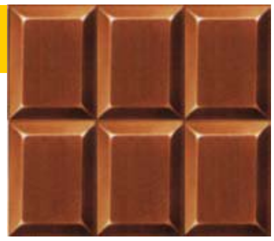
◆ Η έννοια του κλάσματος επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή. Τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.

Είναι $\frac{8}{3} > 1$ διότι $8 > 3$

◆ Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1.

$6 = \frac{6}{1}$, $15 = \frac{15}{1}$, $21 = \frac{21}{1}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



1. Μια σοκολάτα ζυγίζει 120 gr και έχει 6 ίσα κομμάτια.

(α) Ποιο μέρος της σοκολάτας είναι το κάθε κομμάτι;
(β) Πόσα κομμάτια πρέπει να κόψουμε για να πάρουμε 40 gr;

Λύση

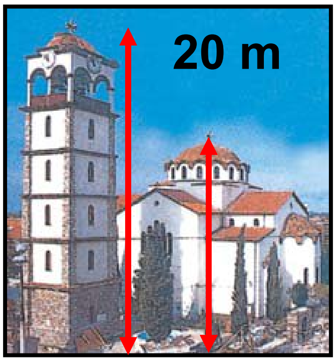
(α) Το κάθε κομμάτι είναι το $\frac{1}{6}$ της σοκολάτας.

(β) Το βάρος κάθε κομματιού θα είναι το $\frac{1}{6}$ του βάρους της σοκολάτας, δηλαδή:

$\frac{1}{6} \cdot 120$ gr $= \frac{120}{6}$ gr $= 20$ gr. Άρα τα 40 gr είναι τα $\frac{2}{6}$ της σοκολάτας.

Δηλαδή, πρέπει να κόψουμε 2 κομμάτια για να πάρουμε 40 gr.

2. ***Το καμπαναριό μιας εκκλησίας έχει ύψος 20 m, ενώ η εκκλησία έχει ύψος τα $\frac{3}{5}$ του ύψους του καμπαναριού. Ποιο είναι το ύψος της εκκλησίας;***



Λύση

Το $\frac{5}{5}$ του ύψους του καμπαναριού είναι 20 m ,
επομένως το $\frac{1}{5}$ αυτού θα είναι $\frac{1}{5} \cdot 20\ m = \frac{20}{5}\ m = 4\ m$.

Τότε τα $\frac{3}{5}$ θα είναι $3 \cdot 4\ m = 12\ m$.

Άρα το ύψος της εκκλησίας θα είναι 12 m.

3. ***Μια δεξαμενή πετρελαίου σε μια πολυκατοικία, χωράει 2000 lt. Ο διαχειριστής σε μια μέτρηση βρήκε ότι ήταν γεμάτη κατά τα $\frac{3}{4}$. Πόσα λίτρα πετρελαίου είχε η δεξαμενή;***

Λύση

Η δεξαμενή ολόκληρη είναι τα $\frac{4}{4}$ και χωράει 2000 lt.
Το $\frac{1}{4}$ της δεξαμενής θα χωράει $\frac{1}{4} \cdot 2000\ lt = \frac{2000}{4}\ lt = 500\ lt$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα $\frac{3}{4}$ θα περιέχουν $3 \cdot 500\ lt = 1500\ lt$.

$$\frac{4}{4} \xrightarrow{:4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\cdot 3} \frac{3}{4}$$

◆ **Για να βρούμε την τιμή του μέρους ξεκινάμε από την τιμή του όλου που είναι η τιμή της μονάδας.**

4. ***Τα $\frac{3}{5}$ του κιλού τυρί κοστίζουν 27 €. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{8}{9}$ του κιλού.***

Λύση

Τα $\frac{3}{5}$ κοστίζουν 27 €. Άρα το $\frac{1}{5}$ θα κοστίζει $27\text{ €} : 3 = 9\text{ €}$.

Τα $\frac{5}{5}$ κοστίζουν $5 \cdot 9\text{ €} = 45\text{ €}$.

$$\frac{3}{5} \xrightarrow{:3} \frac{1}{5} \xrightarrow{\cdot 5} \frac{5}{5} = 1$$

◆ **Για να βρούμε την τιμή του όλου ξεκινάμε από την τιμή του μέρους και υπολογίζουμε την τιμή της μονάδας (αναγωγή στη μονάδα).**

Τα $\frac{9}{9}$ κοστίζουν 45 €. Άρα το $\frac{1}{9}$ κοστίζει $\frac{45}{9}\text{ €} = 5\text{ €}$.

Έτσι τα $\frac{8}{9}$ κοστίζουν $8 \cdot 5\text{ €} = 40\text{ €}$

Διότι είναι: $1 = \frac{5}{5} = \frac{9}{9} = \ldots$

$$\frac{9}{9} \xrightarrow{:9} \frac{1}{9} \xrightarrow{\cdot 8} \frac{8}{9}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. ***Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:***

(α) Στο κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ οι αριθμοί κ και λ ονομάζονται………………………..

(β) Ισχύει ότι: (α) $\frac{\alpha}{1}$ = …., (β) $\frac{\alpha}{\alpha}$ = …., (γ) $\frac{0}{\alpha}$ = ….

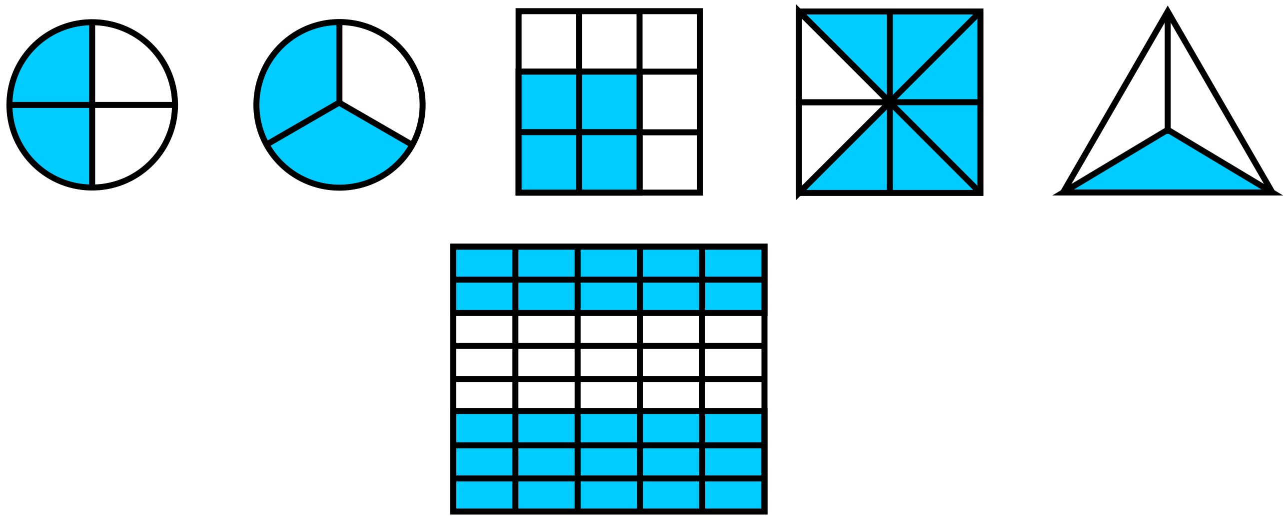
(γ) Η φράση «το μέρος $\frac{\kappa}{\lambda}$ ενός μεγέθους Α» εκφράζει τον χωρισμό του μεγέθους Α σε ……………………………… ………………………………………………………………………

2. *Τα κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{18}{20}$ είναι όλα μικρότερα της μονάδας.*

3. *Τι κλάσμα των μαθητών της τάξης 28 μαθητών είναι οι 4 απόντες.*

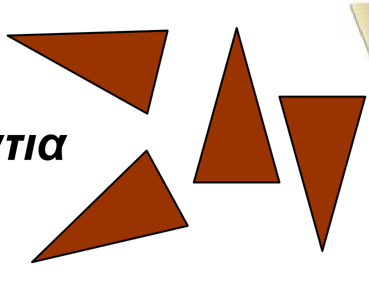
4. *Αν το $\frac{1}{5}$ ενός κιλού καρύδια είναι 14 καρύδια, το κιλό περιέχει 70 καρύδια;*

5. *Τα παρακάτω σχήματα έχουν χωριστεί σε ίσα μέρη. Γράψε για το καθένα από αυτά, το κλάσμα που εκφράζει το χρωματισμένο μέρος του.*



6. *Από μία τούρτα περίσσεψαν τα κομμάτια που βλέπεις στο σχήμα τα οποία αποτελούν τα $\frac{2}{7}$ της τούρτας.*

Πόσα ήταν αρχικά όλα τα κομμάτια της τούρτας;



***7.** Βρες ποιο μέρος του κιλού είναι τα: (α) 100, (β) 250, (γ) 500, (δ) 600 γραμμάρια.*

***8.** Ποιο μέρος: (α) του μήνα, (β) του εξαμήνου, (γ) του έτους είναι οι 15 ημέρες;*

***9.** Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση στα είδη του ίση με τα $\frac{2}{5}$ της αρχικής τιμής τους. Ένα φόρεμα κόστιζε 90 € πριν την έκπτωση. Υπολόγισε πόσα ευρώ έκπτωση έγινε στο φόρεμα και πόσο θα πληρώσουμε για να το αγοράσουμε.*

***10.** Σε μια τάξη τα $\frac{3}{8}$ των μαθητών μαθαίνουν αγγλικά. Να βρεις πόσους μαθητές έχει η τάξη, αν γνωρίζεις ότι αυτοί που μαθαίνουν αγγλικά είναι 12 μαθητές.*

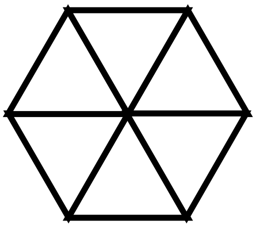
***11.** Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η μια πλευρά του είναι 33 εκατοστά και η άλλη τα $\frac{3}{11}$ της πρώτης. Να βρεις την περίμετρο του ορθογωνίου.*

***12.** Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μήκος 5 εκατοστά. Να σχεδιάσεις: (α) ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με μήκος τα $\frac{8}{10}$ του ΑΒ και (β) ένα ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ με μήκος τα $\frac{6}{5}$ του ΑΒ.*

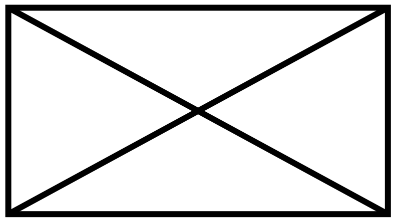
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

***1.** Χρωμάτισε σε καθένα από τα σχήματα που ακολουθούν τα μέρη που αντιστοιχούν στα κλάσματα που είναι γραμμένα κάτω από κάθε σχήμα.*

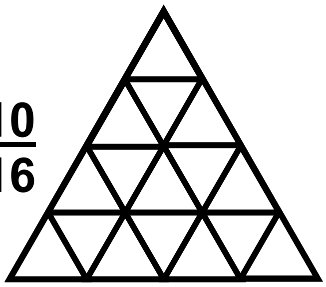
$\frac{6}{5}$



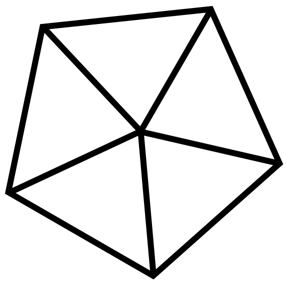
$\frac{1}{4}$



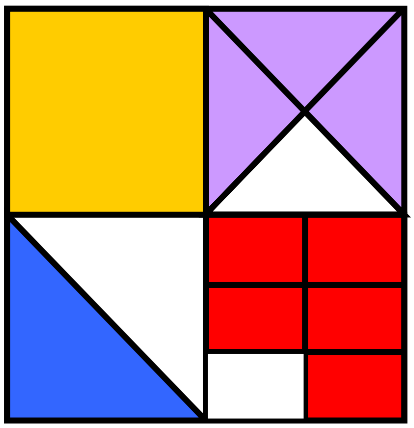
$\frac{10}{16}$



$\frac{3}{5}$



***2.** Να βρεις ποιο μέρος του μεγάλου τετραγώνου είναι κάθε χρωματισμένο μέρος του παρακάτω σχήματος.*

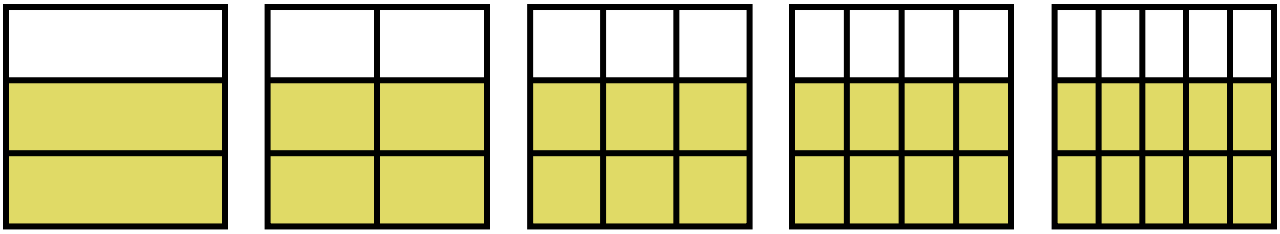


Α.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Τα παρακάτω πέντε τετράγωνα είναι χωρισμένα αντίστοιχα, σε ίσα μέρη.

- ***Προσπάθησε να βρεις για καθεμία περίπτωση το κλάσμα του τετραγώνου που αποτελεί το χρωματισμένο μέρος του.***
- ***Στη συνέχεια σύγκρινε τα κλάσματα, που θα βρεις μεταξύ τους.***
- ***Τι παρατηρείς για τα κλάσματα που βρήκες;***



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται <u>ισοδύναμα</u> όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.**

$\frac{2}{3}$ και $\frac{10}{15}$ ισοδύναμα

Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

δηλαδή $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$

► **Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα "χιαστί γινόμενα" $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα.**

Δηλαδή: αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ τότε $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα ή για να διαπιστώσουμε ότι δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, μπορούμε να εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:

► **Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠ 0) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.** $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

► **Όταν οι όροι ενός κλάσματος διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό (≠ 0) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.**

$\frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$

• Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση του κλάσματος** και έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.

• Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή) λέγεται **ανάγωγο.**

$\frac{7}{12}$ ανάγωγο αφού ΜΚΔ (7, 12) = 1

• Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται **ετερώνυμα.**

$\frac{2}{7}, \frac{5}{7}$ ομώνυμα $\frac{2}{7}, \frac{5}{3}$ ετερώνυμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Να εξετάσετε αν τα κλάσματα:***

(α) $\frac{3}{5}$ *και* $\frac{10}{14}$, *(β)* $\frac{3}{8}$ *και* $\frac{18}{48}$ *είναι ισοδύναμα.*

Λύση

(α) Υπολογίζουμε τα "χιαστί γινόμενα", δηλαδή:
$3 \cdot 14 = 42$ και $5 \cdot 10 = 50$
Τα γινόμενα δεν είναι ίσα, άρα και τα κλάσματα δεν είναι ισοδύναμα.

(β) Υπολογίζουμε τα "χιαστί γινόμενα":
$3 \cdot 48 = 144$ και $8 \cdot 18 = 144$
Τα γινόμενα είναι ίσα, άρα και τα κλάσματα είναι ισοδύναμα, δηλαδή: $\frac{3}{8}$ και $\frac{18}{48}$

2. ***Να απλοποιηθεί το κλάσμα*** $\frac{30}{66}$.

Λύση

Ο ΜΚΔ των όρων του κλάσματος 30 και 66 είναι:
ΜΚΔ (30, 66) = 6
Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με το 6 και έχουμε: $\frac{30}{66} = \frac{30 : 6}{66 : 6} = \frac{5}{11}$

3. ***Να μετατραπούν σε ομώνυμα τα κλάσματα*** $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ ***και*** $\frac{5}{20}$

Λύση

♦ **Πριν από κάθε μετατροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα ελέγχουμε αν τα κλάσματα απλοποιούνται.**

ΜΚΔ (5, 20) = 5 Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος $\frac{5}{20}$ με το 5 και έχουμε: $\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4}$

♦ **Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών των ανάγωγων ετερωνύμων κλασμάτων.**

$\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ ΕΚΠ (5, 3, 4) = 60

♦ **Διαιρούμε το ΕΚΠ με καθένα από τους παρονομαστές**

60 : 5 = 12   60 : 3 = 20   60 : 4 = 15

♦ **Πολλαπλασιάζουμε τους δύο όρους κάθε κλάσματος επί τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκαμε.**

$\overset{12}{\frac{3}{5}} = \frac{3 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{36}{60}$ $\overset{20}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{40}{60}$ $\overset{15}{\frac{1}{4}} = \frac{1 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{15}{60}$

Επομένως τα κλάσματα μετατράπηκαν στα ισοδύναμα ομώνυμα: $\frac{36}{60}, \frac{40}{60}$ **και** $\frac{15}{60}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα, όταν ……..
……………………………………………………………..

(β) Αν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, τότε οι όροι α, β, γ και δ συνδέονται με τη σχέση: ………………………………...

(γ) Ανάγωγο λέγεται το κλάσμα, το οποίο

……………………………………………………………………………

(δ) Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα, που έχουν

……………………………………………………………………………

(ε) Ετερώνυμα λέγονται τα κλάσματα, που έχουν

……………………………………………………………………………

(στ) Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ΜΚΔ τους, το κλάσμα γίνεται

……………………………………………………………………………

***2.** Να εξετάσεις ποια από τα κλάσματα είναι ισοδύναμα*

(α) $\frac{2}{3}, \frac{18}{27}$ *(β)* $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ *(γ)* $\frac{7}{8}, \frac{30}{40}$ *(δ)* $\frac{13}{14}, \frac{26}{28}$.

***3.** Να μετατρέψεις καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή τον αριθμό 100:*

(α) $\frac{3}{4}$ *(β)* $\frac{8}{5}$ *(γ)* $\frac{4}{20}$ *(δ)* $\frac{5}{2}$ *(ε)* $\frac{60}{75}$

***4.** Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή τον αριθμό 3:*

(α) $\frac{10}{6}$ *(β)* $\frac{50}{30}$ *(γ)* $\frac{18}{27}$

***5.** Να τρέψεις το κλάσμα* $\frac{2}{3}$ *σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή α) 6, και (β) 15.*

***6.** Να συμπληρώσεις τα κενά, ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα:*

(α) $\frac{2}{3} = \frac{22}{\dots}$ *(β)* $\frac{\dots}{5} = \frac{9}{15}$ *(γ)* $\frac{14}{4} = \frac{\dots}{20}$ *(δ)* $\frac{48}{36} = \frac{\dots}{24}$.

7. Να απλοποιήσεις τα κλάσματα:

(α) $\frac{25}{30}$, *(β)* $\frac{12}{9}$, *(γ)* $\frac{32}{56}$.

8. Να βρεις ποια από τα κλάσματα είναι ανάγωγα:

(α) $\frac{32}{30}$, *(β)* $\frac{15}{14}$, *(γ)* $\frac{51}{16}$, *(δ)* $\frac{26}{50}$.

9. Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα:

(α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{7}{9}$, *(β)* $\frac{7}{8}$ και $\frac{3}{10}$, *(γ)* $\frac{11}{3}$ και $\frac{7}{12}$.

10. Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος.

(α) Το κλάσμα $\frac{10}{25}$ *απλοποιείται με το 5.* ☐

(β) Το κλάσμα $\frac{3}{5}$ *είναι ανάγωγο.* ☐

(γ) Αν το κλάσμα $\frac{x}{8}$ *τραπεί σε ισοδύναμο με παρονομαστή 24, ο αριθμητής του θα είναι διπλάσιος του x.* ☐

(δ) Αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος επί 4, το κλάσμα θα γίνει 4 φορές μεγαλύτερο. ☐

(ε) Το κλάσμα $\frac{18}{522}$ *απλοποιείται με το 6.* ☐

(στ) Ένα ανάγωγο κλάσμα είναι πάντα μικρότερο του 1. ☐

(ζ) $\frac{0}{4} = \frac{0}{10}$. ☐

(η) $\dfrac{23}{30} = \dfrac{20 + 3}{20 + 10} = \dfrac{3}{10}$.

(θ) $\dfrac{3}{11} = \dfrac{60}{220}$.

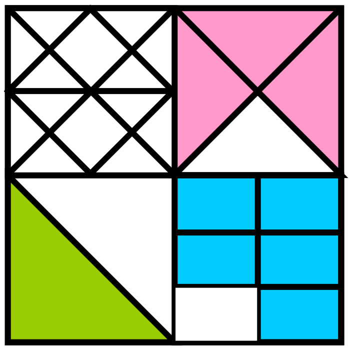
(ι) $\dfrac{41}{41} = \dfrac{3}{10}$.

(ια) *Το κλάσμα* $\dfrac{\alpha + \beta}{1}$ *είναι πάντα ίσο με α + β.*

Α.2.3. Σύγκριση κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ποιο μέρος του μεγάλου τετραγώνου καταλαμβάνει κάθε χρώμα, στο παρακάτω σχήμα;
Η Μαρία είπε πως το ροζ χρώμα καταλαμβάνει $\frac{9}{48}$, το γαλάζιο τα $\frac{10}{48}$ και το πράσινο τα $\frac{7}{48}$.



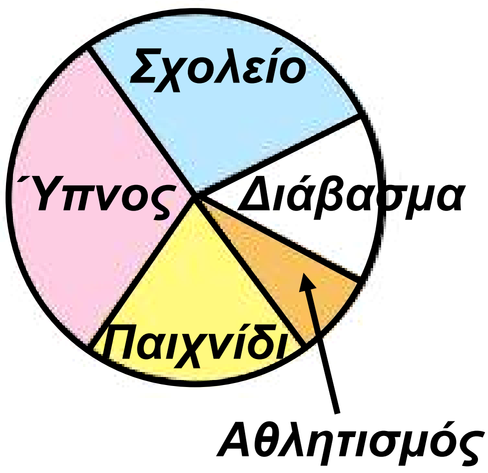
Ενώ ο Γιάννης είπε ότι το ροζ είναι τα $\frac{3}{16}$, το γαλάζιο τα $\frac{5}{24}$ και το πράσινο το $\frac{1}{8}$ του τετραγώνου.

- ***Ποιος έχει δίκιο και ποιος όχι;***
- ***Προσπάθησε να γράψεις σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα που αντιστοιχούν σε καθένα από τα μέρη του τετραγώνου.***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνεται πώς κατανέμονται οι ώρες ενός 24ώρου από ένα μαθητή, της Α΄ Γυμνασίου.

- ***Τι μέρος του χρόνου του είναι κάθε δραστηριότητα;***
- ***Πόσο χρόνο διαρκεί κάθε δραστηριότητα;***
- ***Σε ποια δραστηριότητα δαπανά τον περισσότερο χρόνο;***



➢ ***Γράψε σε μια σειρά τους χρόνους που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις δραστηριότητες, ξεκινώντας από τον μεγαλύτερο και καταλήγοντας στο μικρότερο χρόνο.***

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι το 24ωρο είναι χωρισμένο σε 12 κομμάτια, από τα οποία τα 4 αντιστοιχούν στον ύπνο, τα 3 στο σχολικό ωράριο, τα 2 στο διάβασμα, το 1 στον αθλητισμό και τα 2 στο παιχνίδι. Επομένως, το μέρος που αφιερώνεται για ύπνο είναι τα $\frac{4}{12}$ του συνολικού χρόνου, για το σχολείο τα $\frac{3}{12}$, για το διάβασμα τα $\frac{2}{12}$ για τον αθλητισμό το $\frac{1}{12}$ και για το παιχνίδι τα $\frac{2}{12}$.

Επειδή κάθε κομμάτι αντιστοιχεί σε δύο ώρες, συμπεραίνουμε ότι ό χρόνος που αφιερώνεται για κάθε δραστηριότητα είναι: 8 ώρες για ύπνο, 6 ώρες για το σχολείο, 4 ώρες για διάβασμα, 2 ώρες για αθλητισμό και 4 ώρες για παιχνίδι. Άρα, η ζητούμενη χρονική σειρά των διαφόρων δραστηριοτήτων είναι:

8 ώρες (Ύπνος) > 6 ώρες (Σχολείο) > 4 ώρες (Διάβασμα) = 4 ώρες (Παιγνίδι) > 2 ώρες (Αθλητισμός)

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Γενικά, για τη σύγκριση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

► Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.

$$\frac{9}{13} > \frac{5}{13}$$

► Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.

➢ Για να συγκρίνω τα $\frac{7}{12}$ και $\frac{5}{16}$ τα μετατρέπω σε ομώνυμα:

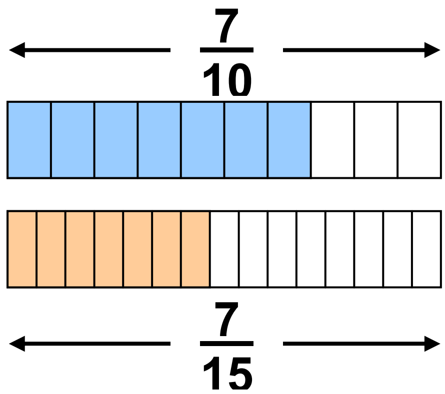
$\frac{7}{12} = \frac{28}{48}$ και $\frac{5}{16} = \frac{15}{48}$ Άρα $\frac{7}{12} > \frac{5}{16}$

► Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή. $\frac{13}{9} < \frac{13}{5}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να συγκριθούν τα κλάσματα* $\frac{7}{10}$ *και* $\frac{7}{15}$.

Λύση



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι “σε όσα περισσότερα μέρη χωρίζεται ένα συγκεκριμένο μέγεθος, τόσο μικρότερα είναι τα μέρη αυτά”.

Δηλαδή: $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$ και $\frac{7}{15} < \frac{7}{10}$.

2. *Να συγκριθούν τα κλάσματα:* $\frac{7}{10}$ *και* $\frac{7}{15}$

Λύση

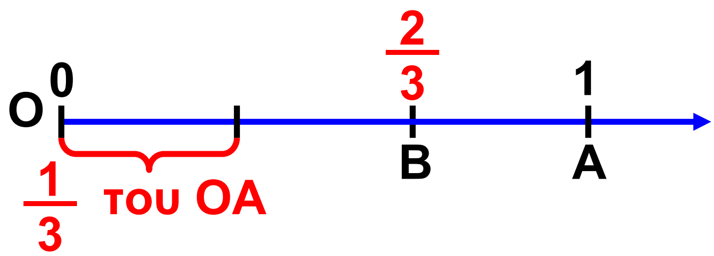
Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα,
ΕΚΠ (8, 9) = 72, επομένως 72 : 8 = 9 και 72 : 9 = 8 οπότε

$\overset{9}{\frac{5}{8}} = \frac{45}{72}$ και $\overset{8}{\frac{4}{9}} = \frac{32}{72}$. Άρα $\frac{5}{8} > \frac{4}{9}$

3. **Να** ***τοποθετηθούν στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα: (α)*** $\frac{2}{3}$ ***και (β)*** $\frac{8}{5}$.

Λύση

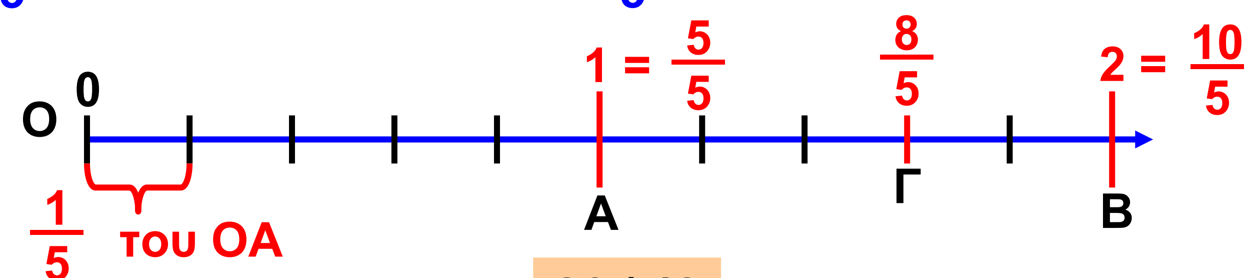
(α) Για το κλάσμα $\frac{2}{3}$ **γνωρίζουμε ότι:** $0 < \frac{2}{3} < \frac{3}{3} = 1$**. Δηλαδή βρίσκεται μεταξύ των φυσικών αριθμών 0 και 1. Επειδή ο παρονομαστής είναι ο αριθμός 3, η απόσταση των φυσικών 0 και 1 πρέπει να χωριστεί σε 3 ίσα μέρη. Το σημείο Β απέχει από το Ο απόσταση ίση με τα** $\frac{2}{3}$ **του ΟΑ. Έτσι, το** $\frac{2}{3}$ **τοποθετείται στο σημείο Β.**



(β) Για το κλάσμα $\frac{8}{5}$ **γνωρίζουμε ότι:**

$1 = \frac{5}{5} < \frac{8}{5} < \frac{10}{5} = 2$.

Καθένα, από τα τμήματα ΟΑ και ΑΒ του σχήματος είναι ίσο με τη μονάδα. Τα χωρίζουμε σε 5 ίσα τμήματα, ώστε το καθένα να είναι ίσο με το $\frac{1}{5}$ **της μονάδας. Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ αποτελείται από 8 ίσα τμήματα ίσα με το** $\frac{1}{5}$ **της μονάδας το καθένα. Το μήκος ΟΓ είναι** $\frac{8}{5}$ **του ΟΑ. Άρα το κλάσμα** $\frac{8}{5}$ **τοποθετείται στο σημείο Γ**



4. ***Να βρεθεί ένα κλάσμα μεγαλύτερο από το $\frac{2}{5}$ και μικρότερο από τα $\frac{3}{5}$.***

Λύση

Τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{5}$ είναι ομώνυμα και ανάμεσα στους αριθμητές τους 2 και 3 δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός. Μπορούμε, όμως, να βρούμε ισοδύναμα κλάσματα με αυτά π.χ. τα $\frac{4}{10}$ και $\frac{6}{10}$, για τα οποία μεταξύ των αριθμητών τους 4 και 6 υπάρχει ο αριθμός 5.

Επομένως, αφού το κλάσμα $\frac{5}{10}$ είναι μεταξύ των $\frac{4}{10}$ και $\frac{6}{10}$, θα είναι και $\frac{2}{5} < \frac{5}{10} < \frac{3}{5}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. ***Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:***

(α) Για να συγκρίνουμε δύο κλάσματα πρέπει αυτά να είναι ……………………………………….

(β) Ένα κλάσμα είναι:

(i) ίσο με 1, αν ο αριθμητής του είναι …………………… τον παρονομαστή.

(ii) μικρότερο του 1, αν ο αριθμητής του είναι ………………………… τον παρονομαστή.

(iii) μεγαλύτερο του 1, αν ο αριθμητής του ………………………… τον παρονομαστή.

(γ) Αν $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ τότε ………………….

2. ***Σύγκρινε τα κλάσματα:***

(α) $\frac{3}{7}$ *και* $\frac{5}{7}$, *(β)* $\frac{3}{5}$ *και* $\frac{3}{9}$, *(γ)* $\frac{4}{5}$ *και* $\frac{8}{12}$.

3. ***Γράψε τα κλάσματα*** $\frac{31}{10}, \frac{31}{14}, \frac{31}{11}, \frac{31}{13}, \frac{31}{12}$ ***σε φθίνουσα σειρά.***

4. ***Σύγκρινε με το 1 τα κλάσματα:***

(α) $\frac{5}{8}$, *(β)* $\frac{9}{10}$, *(γ)* $\frac{12}{11}$, *(δ)* $\frac{16}{16}$, *(ε)* $\frac{109}{120}$.

5. ***Βάλε σε σειρά τα κλάσματα:*** $\frac{3}{5}, \frac{8}{15}, \frac{5}{10}, \frac{7}{5}, \frac{20}{15}$

6. ***Βρες μεταξύ ποιων διαδοχικών φυσικών αριθμών βρίσκεται καθένα από τα παρακάτω κλάσματα***

(α) $\frac{5}{3}$, *(β)* $\frac{7}{2}$, *(γ)* $\frac{8}{9}$, *(δ)* $\frac{63}{5}$, *(ε)* $\frac{125}{10}$

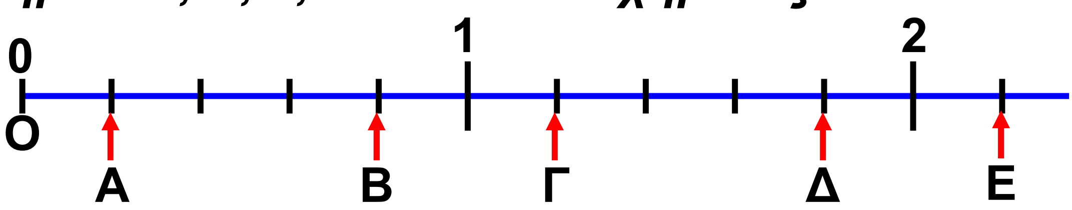
7. ***Τοποθέτησε στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα:***

(α) $\frac{1}{2}$, *(β)* $\frac{3}{2}$, *(γ)* $\frac{5}{2}$, *(δ)* $\frac{1}{4}$,

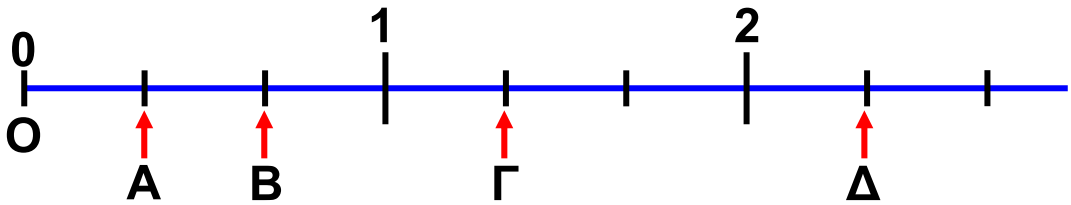
(ε) $\frac{3}{4}$, *(στ)* $\frac{4}{5}$, *(ζ)* $\frac{9}{10}$.

8. ***Ποιοι κλασματικοί αριθμοί πρέπει να τοποθετηθούν στα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του σχήματος:***

(α)

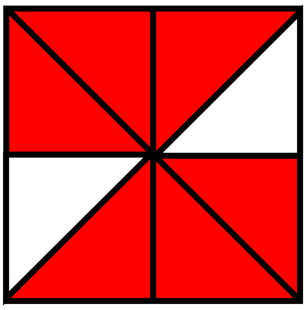


(β)

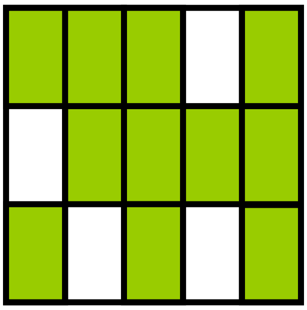


9. ***Συμπλήρωσε τις κενές θέσεις του πίνακα με το κλάσμα που αντιστοιχεί στο χρωματισμένο τμήμα του τετραγώνου με το αντίστοιχο γράμμα και μετά βάλε τα κλάσματα που βρήκες σε φθίνουσα σειρά.***

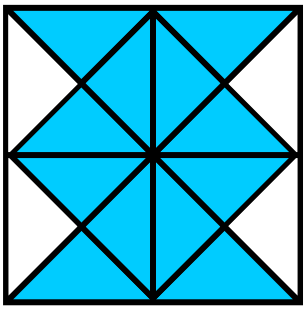
Α



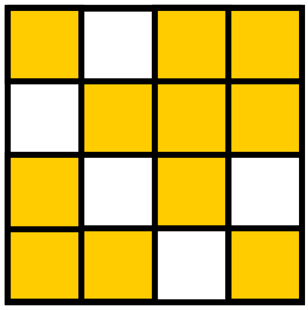
Β



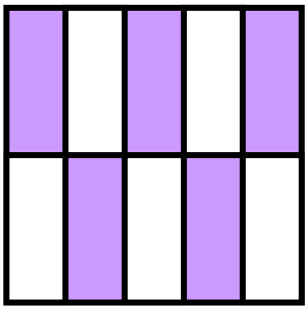
Γ



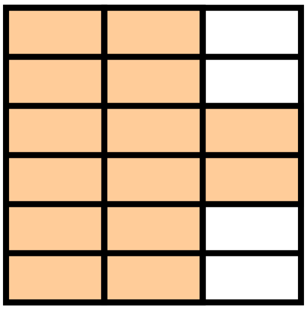
Δ



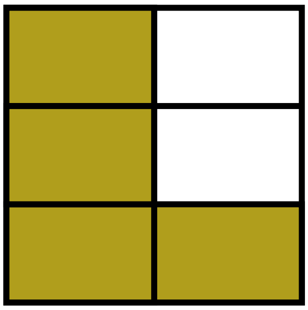
Ε



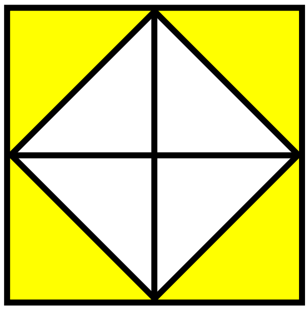
ΣΤ



Ζ



Η



Α	Β	Γ	Δ	Ε	ΣΤ	Ζ	Η

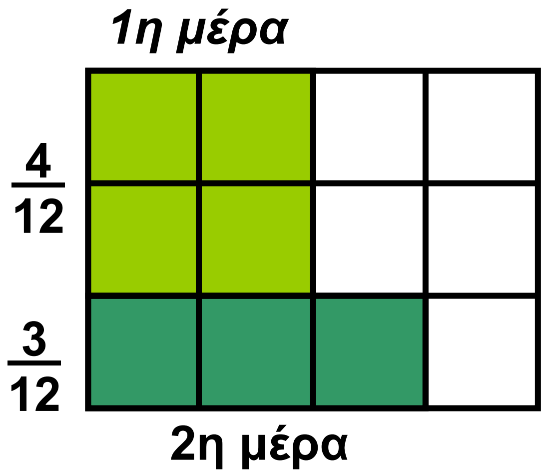
Α.2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Το συνεργείο του Δήμου φύτεψε σε μια μέρα τα $\frac{4}{12}$ μιας πλατείας με λουλούδια. Την επόμενη ημέρα που ο καιρός δεν ήταν καλός φύτεψε μόνο τα $\frac{3}{12}$ της πλατείας.

- ***Ποιο τμήμα της πλατείας είχε φυτέψει, συνολικά, στο τέλος της δεύτερης ημέρας;***

Σκεφτόμαστε



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι στο τέλος της δεύτερης ημέρας έχουν φυτευτεί, συνολικά, τα $\frac{7}{12}$ της πλατείας.

Πράγμα που σημαίνει ότι το άθροισμα $\frac{4}{12} + \frac{3}{12}$ κάνει $\frac{7}{12}$.

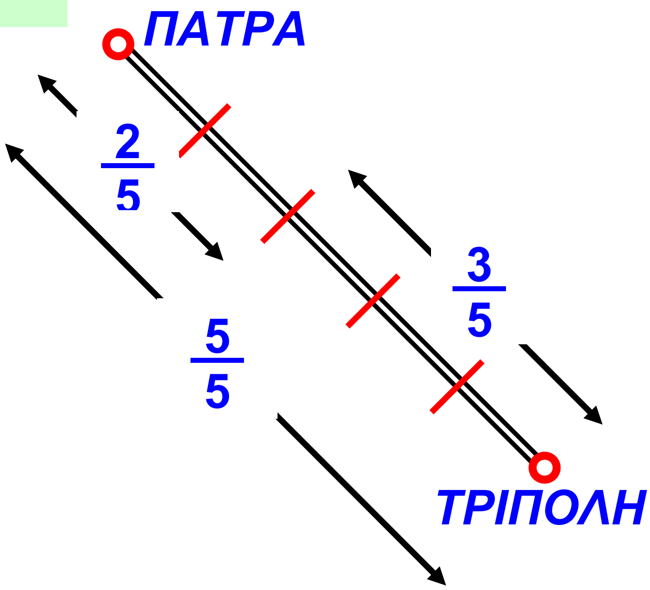
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ένα φορτηγό κάλυψε σε μία ώρα τα $\frac{2}{5}$ της διαδρομής Πάτρα - Τρίπολη.

- ***Ποιο μέρος της διαδρομής του μένει να καλύψει ακόμη;***

Σκεφτόμαστε

Όπως φαίνεται στο σχήμα δεν έχουν καλυφθεί τα $\frac{3}{5}$ της διαδρομής.



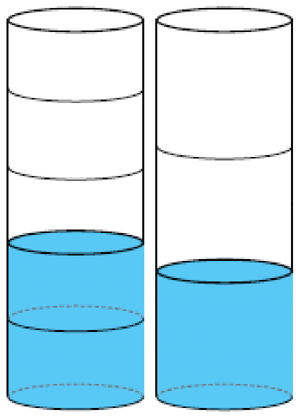
Επομένως, η διαφορά $\frac{5}{5} - \frac{2}{5}$ κάνει τα $\frac{3}{5}$ του συνόλου της διαδρομής.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Μια βρύση γεμίζει, σε 1 ώρα, τα $\frac{2}{5}$ της δεξαμενής. Μια άλλη βρύση γεμίζει το $\frac{1}{3}$ της ίδιας δεξαμενής, επίσης σε 1 ώρα. Αν και οι δύο βρύσες τρέχουν ταυτόχρονα μέσα στη δεξαμενή, τι μέρος της δεξαμενής θα γεμίσουν σε 1 ώρα;

Σκεφτόμαστε

Αν οι βρύσες “τρέχουν” ταυτόχρονα στη δεξαμενή για 1 ώρα θα έχουν γεμίσει ένα τμήμα της που αντιστοιχεί στο άθροισμα των τμημάτων αυτής που η κάθε μία γεμίζει ξεχωριστά. Δηλαδή το …



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Γενικά, για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

► Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma} \qquad \frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7+2}{5} = \frac{9}{5}$$

► Προσθέτουμε ετερώνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.

$$\frac{7}{4} + \frac{2}{3} = \frac{21}{12} + \frac{8}{12} = \frac{29}{12}$$

► Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \qquad \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$$

► Αφαιρούμε δύο ετερώνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα.

$$\frac{7}{4} - \frac{2}{3} = \frac{21}{12} - \frac{8}{12} = \frac{13}{12}$$

◆ Μερικές φορές αντί να γράφουμε, $1 + \frac{4}{5}$,

γράφουμε πιο απλά $1\frac{4}{5}$.

● Ο συμβολισμός αυτός, που παριστάνει το άθροισμα ενός **ακέραιου** με ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας, ονομάζεται **μεικτός αριθμός.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογισθεί το άθροισμα $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 3$

Λύση

Μετατρέπουμε το φυσικό αριθμό σε κλάσμα με παρονομαστή 4.

Είναι: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + 3 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3 \cdot 4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{12}{4} = \frac{15}{4}$

2. *Να αποδειχθεί ότι: α)* $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + 1$ *και (β)* $\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1$

Λύση

(α) $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + 1$

(β) $\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1$

3. *Να υπολογισθεί η διαφορά και το άθροισμα των κλασμάτων* $\frac{3}{12}$ *και* $\frac{7}{20}$.

Λύση

Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα και πρέπει πρώτα να μετατραπούν σε ισοδύναμα ομώνυμα. Έχουμε:
ΕΚΠ (12, 20) = 60 οπότε: 60 : 12 = 5 και 60 : 20 = 3

Άρα: $\overset{5)}{\frac{3}{12}} = \frac{3 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{15}{60}$ και $\overset{5)}{\frac{3}{12}} = \frac{7 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{21}{60}$

Επειδή $\frac{21}{60} > \frac{15}{60}$ μπορεί να υπολογιστεί η διαφορά:

$\frac{7}{20} - \frac{3}{12} = \frac{21}{60} - \frac{15}{60} = \frac{21 - 15}{60} = \frac{6}{60} = \frac{6 : 6}{60 : 6} = \frac{1}{10}$

Και $\frac{7}{20} + \frac{3}{12} = \frac{21}{60} + \frac{15}{60} = \frac{21+15}{60} = \frac{36}{60} = \frac{36:12}{60:12} = \frac{3}{5}$

4. *Να βρεθεί η διαφορά:* $\frac{15}{4} - 1$ *και το αποτέλεσμα να γίνει μεικτός.*

Λύση

$$\frac{15}{4} - 1 = \frac{15}{4} - \frac{4}{4} = \frac{15-4}{4} = \frac{11}{4}$$

Για να τρέψουμε το αποτέλεσμα σε μεικτό αριθμό εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση: 11 = 4 · 2 + 3 και έχουμε:

$$\frac{11}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{4} + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2\,\frac{3}{4}$$

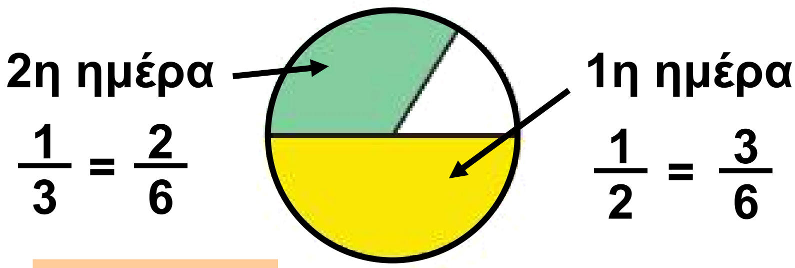
5. *Να βρεθεί το άθροισμα* $2 + 1\frac{1}{3}$.

Λύση

$$2 + 1\frac{1}{3} = 2 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3} + \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{6}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+1}{3} = \frac{10}{3}$$

6. *Την πρώτη ημέρα ένας κηπουρός κούρεψε το γκαζόν στο* $\frac{1}{2}$ *μιας στρογγυλής πλατείας. Την δεύτερη ημέρα, εξαιτίας μιας δυνατής βροχής, κατάφερε να κουρέψει μόνο το* $\frac{1}{3}$ **του αρχικού γκαζόν.** *Ποιο μέρος από το γκαζόν της πλατείας κουρεύτηκε μέχρι και το τέλος της δεύτερης μέρας;*

Λύση



Για να βρούμε το μέρος της πλατείας που κουρεύτηκε, στο τέλος της δεύτερης ημέρας, δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε τα δύο κλάσματα, δηλαδή το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{1}{3}$.

Αλλά, για να εκτελέσουμε αυτή την πρόσθεση πρέπει να μετατρέψουμε τα δύο κλάσματα σε ομώνυμα. Άρα, θα έχουμε: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

Για να βρούμε ποιο κλάσμα της πλατείας έχει απομείνει για κούρεμα, πρέπει να αφαιρέσουμε από το όλο μέρος, δηλαδή: $\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Υπολόγισε τα αθροίσματα:

(α) $\frac{5}{3} + \frac{2}{3}$, *(β)* $\frac{11}{13} + \frac{2}{13}$, *(γ)* $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}$,

(δ) $\frac{8}{12} + \frac{2}{3}$, *(ε)* $\frac{17}{20} + \frac{3}{15}$, *(στ)* $\frac{15}{12} + \frac{5}{4}$ *, και απλοποίησε το τελικό αποτέλεσμα, αν δεν είναι ανάγωγο κλάσμα.*

2. Να βρεις τις διαφορές και να απλοποιήσεις το αποτέλεσμα, όπου αυτό δεν είναι ανάγωγο κλάσμα:

(α) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$, *(β)* $\frac{8}{9} - \frac{3}{9}$, *(γ)* $\frac{10}{8} - \frac{3}{4}$,

(δ) $\frac{4}{9} - \frac{2}{27}$, *(ε)* $\frac{7}{3} - \frac{5}{8}$, *(στ)* $\frac{3}{7} - \frac{3}{11}$.

3. *Να μετατρέψεις τους μεικτούς αριθμούς σε κλάσματα:*

(α) $3\frac{5}{8}$, *(β)* $4\frac{1}{10}$, *(γ)* $2\frac{1}{9}$

4. *Κάνε τα ακόλουθα κλάσματα μεικτούς αριθμούς:*

(α) $\frac{15}{4}$, *(β)* $\frac{5}{2}$, *(γ)* $\frac{38}{12}$

5. *Υπολόγισε τα αθροίσματα:*

(α) $\frac{3}{8} + 2$, *(β)* $\frac{12}{15} + 1$, *(γ)* $\frac{16}{20} + \frac{3}{10} + 5$

6. *Να βρεις τις διαφορές:*

(α) $3 - 2\frac{1}{5}$, *(β)* $4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}$, *(γ)* $1\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$.

7. *Τρία αδέλφια μοίρασαν 20.000 €. Ο πρώτος πήρε τα $\frac{2}{5}$ του ποσού, ο δεύτερος $\frac{1}{8}$ λιγότερα από τον πρώτο και ο τρίτος τα υπόλοιπα. Ποιο μέρος του ποσού πήρε ο καθένας και πόσα χρήματα είναι το μέρος του ποσού για κάθε αδελφό;*

8. *Ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσουμε στο $\frac{3}{8}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{5}{9}$;*

9. *Ένας αγρότης πούλησε σε τέσσερις εμπόρους τα $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{10}$ της παραγωγής του. Ποιο μέρος της παραγωγής του έμεινε απούλητο;*

10. Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πράξη και Λ μπροστά από κάθε λάθος.

☐ (α) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$

☐ (β) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{20}{12}$

☐ (γ) $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

☐ (δ) $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$

☐ (ε) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{8}$

☐ (στ) $\frac{3 + 5}{5} = \frac{3}{5} + 1$

☐ (ζ) $\frac{8 - 3}{8} = 1 - \frac{3}{8}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

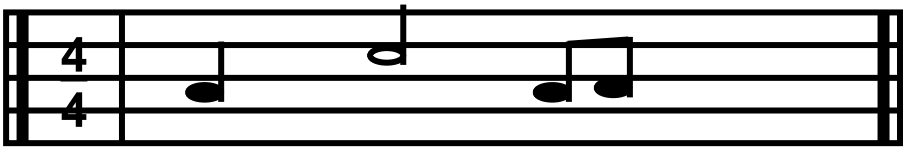
1. *Αντιστοίχισε σε κάθε πρόσθεση το σωστό αποτέλεσμα:*

$\frac{8}{10} + \frac{4}{10}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{5}{9} + \frac{4}{9}$	2
$\frac{45}{90} + \frac{15}{90}$	$\frac{6}{5}$
$\frac{16}{12} + \frac{8}{12}$	$\frac{5}{5}$

2. *Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

+	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{5}$
$\frac{5}{7}$				
$\frac{3}{2}$				
1				
$\frac{3}{5}$				

ΝΟΤΕΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΑ



Ανάμεσα στα κοινά στοιχεία όλων των ανθρωπίνων πολιτισμών είναι η δυνατότητα αρίθμησης και μουσικής έκφρασης.

- ***Ο άνθρωπος δημιουργεί μουσική, ήδη, από τους προϊστορικούς χρόνους, αφού το αρχαιότερο σχετικό εύρημα, που έχει ηλικία 35.000 χρόνων, είναι οστά από μαμούθ τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή ρυθμικών ήχων.***

- ***Οι μελέτες έχουν δείξει, ότι η έννοια του αριθμού εμφανίζεται στον άνθρωπο από τα πρώτα του βήματα. Διαπιστώθηκε ότι αυτή η πρώιμη ικανότητα αρίθμησης σχετίζεται με την ικανότητα της κατάτμησης του χρόνου, που δημιουργεί η αντιστοιχία γεγονότων και χρονικών στιγμών και μάλιστα χωρίς, τη χρήση της έννοιας του αριθμού.***

Εξάλλου η αρίθμηση είναι μια πολιτιστική αναγκαιότητα, ένα καθολικό στοιχείο πολιτισμού. Η συνάντηση της Μουσικής με τα Μαθηματικά πραγματοποιείται μέσα από την αίσθηση, που έχουμε για τον χρόνο και εντοπίζεται σε δύο βασικούς άξονες κάθε μουσικής έκφρασης, το Ρυθμό και την Αρμονία.

Ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να εντοπίζει και να απομονώνει τις χρονικές στιγμές. Το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο στιγμών, δημιουργεί την αίσθηση της διάρκειας. Ο χωρισμός του χρόνου από τα γεγονότα δημιουργεί ένα πυκνό σύνολο από στιγμές. Έτσι, ο ρυθμός και ο αριθμός έχουν κοινή καταγωγή, το χωρισμό του χρόνου σε στιγμές και την αντιστοίχιση

των χρονικών στιγμών με γεγονότα. Ο ρυθμός είναι από τις πρώτες μουσικές ανθρώπινες κατακτήσεις, όπως ακριβώς ο αριθμός είναι από τις πρώτες θεμελιώδεις Μαθηματικές ανθρώπινες επινοήσεις. Ο ρυθμός, λοιπόν, είναι το πρώτο είδος μουσικής που δημιούργησε ο άνθρωπος. Το μουσικό μέτρο, το οποίο είναι απαραίτητο για την εκτέλεση ενός μουσικού θέματος, δηλώνεται με ένα κλάσμα που καθορίζει το ρυθμό. Σήμερα οι δύο αυτές έννοιες, του ρυθμού και του αριθμού - κλάσματος, συνυπάρχουν στον τρόπο με τον οποίο γράφεται η Δυτική Μουσική. Ας δούμε ένα παράδειγμα: Στο σχήμα της σελίδας 67 φαίνεται ένα μέρος ενός μουσικού κομματιού. Η χρονική αξία του πρώτου και δεύτερου συμβόλου είναι $\frac{1}{4}$ ***και*** $\frac{1}{2}$ ***αντίστοιχα, ενώ κάθε ένα από τα σύμβολα (νότες), που είναι ενωμένα έχουν εξ ορισμού αξία*** $\frac{1}{8}$***.***

Το κλάσμα $\frac{4}{4}$ ***στην αρχή καθορίζει πως κάθε μέτρο, κάθε διάστημα δηλαδή, το οποίο περιέχει μια μουσική φράση, πρέπει να περιέχει σύμβολα (νότες) συνολικής αξίας*** $\frac{4}{4}$***. Πράγματι*** $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{4}$***. Με αυτόν τον τρόπο ο αριθμός - κλάσμα καθορίζει το ρυθμό και επιτρέπει να εκτελείται ένα μουσικό κομμάτι συγχρονισμένα από τους μουσικούς.***

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

► **Βρες παρτιτούρες από τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και γράψε τα κλάσματα, που αντιστοιχούν στους ρυθμούς των τραγουδιών αυτών.**

► **Αναζήτησε και βρες ορισμένα χαρακτηριστικά τραγούδια με διαφορετικούς ρυθμούς και προσπάθησε να συσχετίσεις τα κλάσματα, που αντιστοιχούν στους ρυθμούς αυτούς, με την ονομασία του εκάστοτε συγκεκριμένου ρυθμού.**

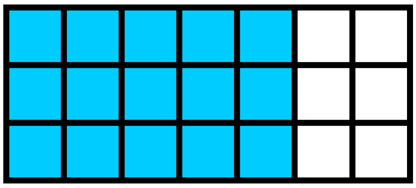
Α.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας πεζόδρομος στρώθηκε με πλάκες. Τα $\frac{5}{7}$ από τις πλάκες είναι χρωματιστές. Από αυτές τα $\frac{2}{3}$ είναι κόκκινες.

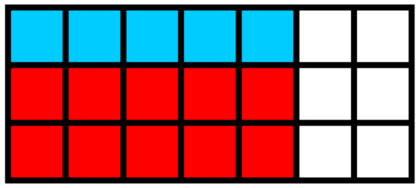
➢ ***Ποιο είναι το μέρος όλου του πεζόδρομου που καταλαμβάνουν οι κόκκινες πλάκες;***

$\frac{5}{7}$



$\frac{5}{7}$

$\frac{2}{3}$



Σκεφτόμαστε

Ο πεζόδρομος έχει συνολικά 21 πλάκες, επομένως τα $\frac{5}{7}$ αυτού είναι 15 πλάκες. Από αυτές τα $\frac{2}{3}$ δηλαδή οι 10 είναι κόκκινες. Άρα οι κόκκινες είναι τα $\frac{10}{21}$ του συνόλου. Παρατηρούμε, όμως, ότι οι κόκκινες πλάκες είναι τα $\frac{2}{3}$ των $\frac{5}{7}$ του συνόλου.

Συνεπώς, θα έχουμε ότι $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ είναι $\frac{10}{21}$, δηλαδή:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}.$$

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Από τα παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο κανόνα:

► Το γινόμενο **δύο κλασμάτων** είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή **το γινόμενο των αριθμητών** και παρονομαστή **το γινόμενο των παρονομαστών.**

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} \qquad \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$$

► Το γινόμενο ενός **φυσικού αριθμού** επί ένα **κλάσμα** είναι το κλάσμα με αριθμητή **το γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό** και με τον ίδιο παρονομαστή.

$$\lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lambda = \frac{\alpha \cdot \lambda}{\beta} \qquad 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{5} = \frac{21}{5}$$

● Τα κλάσματα που έχουν **γινόμενο 1** λέγονται **αντίστροφα.**

Επειδή $\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = 1$ τα κλάσματα $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\gamma}$ είναι αντίστροφα.

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{35}{35} = 1$$

► **Ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων των φυσικών αριθμών στα κλάσματα.**

◆ Το 1 δε μεταβάλλει το γινόμενο

$$1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta} \qquad 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

◆ **Αντιμεταθετική**

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$$

◆ **Προσεταιριστική**

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{11}{13}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{11}{13}$$

◆ **Επιμεριστική**

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\zeta}\right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} + \frac{11}{13}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{13}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\varepsilon}{\zeta}\right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} - \frac{11}{13}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} - \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{13}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να *βρεθεί το γινόμενο:* $\frac{3}{7} \cdot \frac{70}{6} \cdot \frac{8}{5}$

Λύση

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{70}{6} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3 \cdot 70 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 560}{7 \cdot 30} = \frac{1680}{210} = 8$$

2. ***Σε ένα σχολείο με 252 μαθητές, τα $\frac{5}{9}$ είναι αγόρια. Να βρεις πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει το σχολείο.***

Λύση

Αφού τα αγόρια είναι τα $\frac{5}{9}$ των μαθητών, θα είναι:

$$\frac{5}{9} \cdot 252 = \frac{5 \cdot 252}{9} = \frac{1260}{9} = 140 .$$

Επομένως, τα κορίτσια θα είναι: 252 – 140 = 112.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. ***Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:***

(α) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα

....

....

(β) Δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι, όταν

....

....

(γ) Ο αντίστροφος του αριθμού κ είναι ο …., του $\frac{1}{κ}$ είναι ο …. και του $\frac{κ}{λ}$ είναι ο …..

(δ) Μόνο ο αριθμός …… ισούται με τον αντίστροφό του.

2. ***Υπολόγισε τα γινόμενα:***

(α) $3 \cdot \frac{3}{4}$, ***(β)*** $7 \cdot \frac{10}{14}$, ***(γ)*** $\frac{4}{2} \cdot 2$, ***(δ)*** $\frac{5}{100} \cdot 10$.

3. ***Βρες τα γινόμενα:***

(α) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8}$, *(β)* $\frac{8}{10} \cdot \frac{100}{5}$, *(γ)* $\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9}$, *(δ)* $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15}$.

4. ***Συμπλήρωσε τον πίνακα:***

$\cdot$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$
$\frac{7}{5}$				
$\frac{2}{3}$				
1				
$\frac{4}{3}$				

5. ***Υπολόγισε τα γινόμενα:***

(α) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{21}$, *(β)* $4\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$,

(γ) $3\frac{1}{8} \cdot 10$ *(δ)* $1\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

6. ***Να βρεις τους αντίστροφους των αριθμών:***

(α) $\frac{4}{7}$ *(β)* 72 *(γ)* $\frac{5}{8}$ *(δ)* $\frac{1}{3}$ *(ε)* $\frac{739}{8}$ *(στ)* 1.

7. ***Ο Κώστας ήπιε τα $\frac{2}{3}$ από ένα μπουκάλι, που περιείχε αναψυκτικό όγκου $1\frac{1}{2}$ του λίτρου. Πόσα λίτρα αναψυκτικού ήπιε;***

8. ***Υπολόγισε τα εξαγόμενα των πράξεων***

(α) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$, (β) $\left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$,

γ) $\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$

9. ***Όμοια:*** (α) $\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{3}{8}$,

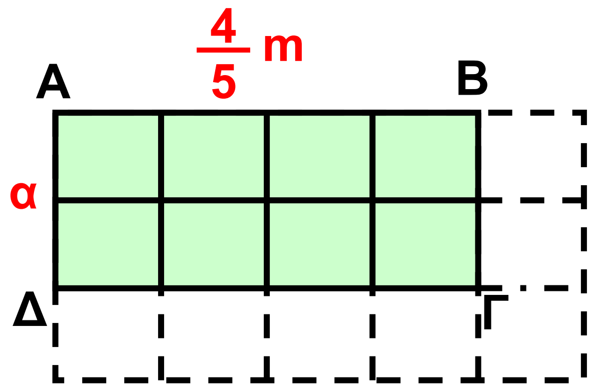
(β) $\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{15}\right) \cdot \frac{3}{8}$, (γ) $\frac{7}{3} - \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{8}$

Α.2.6. Διαίρεση κλασμάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $\frac{8}{15}$ m^2.

➤ ***Προσπάθησε να επεκτείνεις το ορθογώνιο ώστε ο συνολικό εμβαδό που θα προκύψει να είναι $\frac{15}{15}$ m^2, δηλαδή $1m^2$.***



➤ ***Βρες το πλάτος α του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.***

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

► **Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.**

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$5 : 4 = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

► **Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.**

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{28}{15}$$

● Ένα κλάσμα, του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, ονομάζεται **σύνθετο κλάσμα**.

Μετατροπή σύνθετου σε απλό

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{15}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα:*

(α) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}}$ (β) $\dfrac{4}{\frac{9}{8}}$ (γ) $\dfrac{\frac{7}{10}}{5}$

Λύση

(α) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} = \dfrac{2 \cdot 9}{3 \cdot 10} = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$,

(β) $\dfrac{4}{\frac{9}{8}} = \dfrac{\frac{4}{1}}{\frac{9}{8}} = \dfrac{4 \cdot 8}{1 \cdot 9} = \dfrac{32}{9} = 3\,\dfrac{5}{9}$

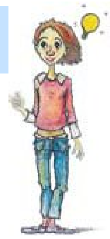
(γ) $\dfrac{\frac{7}{10}}{5} = \dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{5}{1}} = \dfrac{7 \cdot 1}{10 \cdot 5} = \dfrac{7}{50}$

2. **Να εκτελεστούν οι πράξεις:** $\dfrac{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{6}}$

Λύση

$$\frac{\frac{3}{10}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{4}{6}} = \frac{\frac{3}{10}+\frac{5}{10}}{\frac{8}{6}-\frac{4}{6}} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{4}{6}} = \frac{8 \cdot 6}{4 \cdot 10} = \frac{48}{40} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. **Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:**

(α) Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα ....

....

....

(β) Σύνθετο κλάσμα λέγεται το κλάσμα, του οποίου

....

....

2. **Να κάνεις τις διαιρέσεις:**

(α) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, (β) $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$, (γ) $\frac{10}{100} : \frac{1}{5}$, (δ) $\frac{7}{3} : \frac{21}{27}$.

3. **Να βρεις τα πηλίκα:**

(α) $2 : \frac{1}{3}$, (β) $\frac{5}{8} : 1$, (γ) $2\frac{1}{2} : 4$,

(δ) $4\frac{1}{10} : 3\frac{1}{3}$.

4. ***Να κάνεις τις διαιρέσεις:***

(α) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, *(β)* $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, *(γ)* $\frac{20}{6} : 10$, *(δ)* $10 : \frac{20}{6}$.

Τι παρατηρείς;

5. ***Να κάνεις τις διαιρέσεις:***

(α) $\frac{1}{8} : \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\right)$ **και** *(β)* $\left(\frac{1}{8} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{2}$

Τι παρατηρείς;

6. ***Συμπλήρωσε τον πίνακα:***

:	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{7}$				
$\frac{1}{2}$				
1				
$\frac{4}{3}$				

7. ***Αντιστοίχισε σε κάθε διαίρεση το σωστό αποτέλεσμα:***

$\frac{3}{10} : \frac{4}{10}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{5}{9} : \frac{4}{9}$	6
$\frac{45}{90} : \frac{15}{9}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{16}{3} : \frac{8}{9}$	$\frac{3}{10}$

8. ***Να μετατρέψεις τα σύνθετα κλάσματα σε απλά:***

(α) $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{5}}$ *(β)* $\dfrac{\frac{15}{3}}{4}$ *(γ)* $\dfrac{20}{\frac{5}{4}}$.

9. ***Κάνε τις πράξεις και απλοποίησε τα κλάσματα:***

(α) $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{4}{6}}$ *(β)* $\dfrac{\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{8}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{11}}$ *(γ)* $\dfrac{\frac{2}{3}:\frac{4}{3}}{\frac{1}{8}:2}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Στον πάπυρο του Ριντ, βρήκαμε πως οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι υπολόγιζαν τα $\frac{2}{3}$ ενός οποιουδήποτε κλάσματος με αριθμητή το 1 και παρονομαστή έναν περιττό αριθμό.

Για παράδειγμα, τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{1}{7}$ θα είναι:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$$

- ***Μπορείς να βρεις ποιο κανόνα χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι;***
- ***Εφάρμοσε τον κανόνα αυτό και βρες τα $\frac{2}{3}$ των κλασμάτων $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$ και στη συνέχεια επαλήθευσε τα αποτελέσματα που βρήκες.***

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

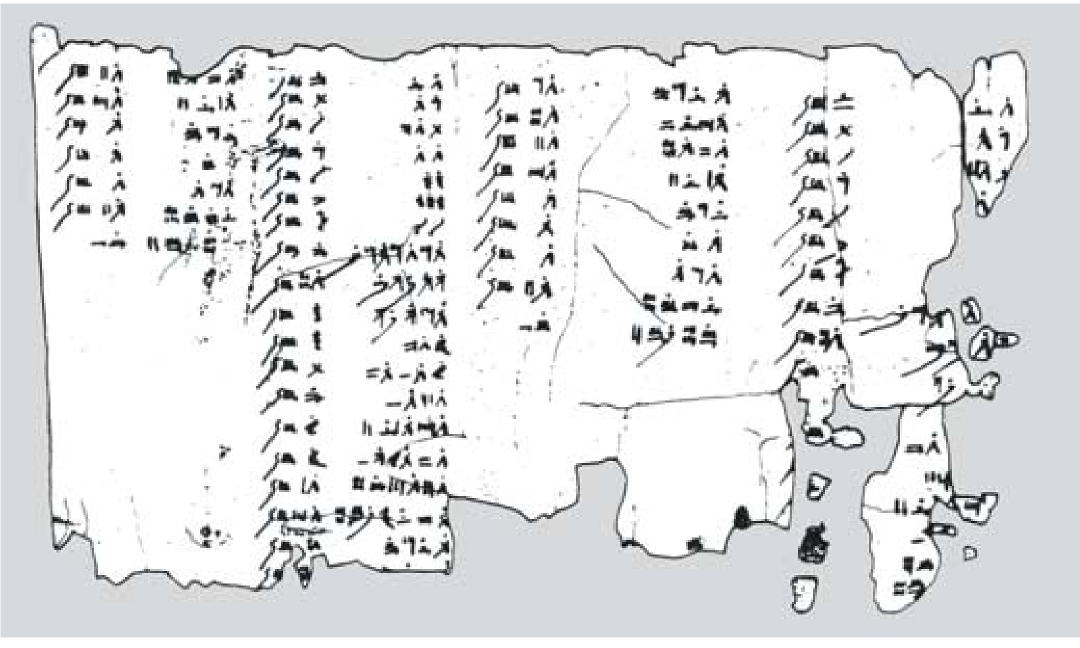
Σε αρχαία βαβυλωνιακά μαθηματικά κείμενα που χρονολογούνται από το 2100 π.Χ. περίπου, συναντάμε εξηκονταδικά κλάσματα με παρονομαστή δύναμη του 60, για τα οποία υπήρχαν ειδικά σφηνοειδή σύμβολα. Οι **Βαβυλώνιοι** ***είχαν επίσης ειδικά σύμβολα για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.***

Οι **Αιγύπτιοι**, ***επίσης, γνωρίζουν να χρησιμοποιούν τα λεγόμενα θεμελιώδη ή αιγυπτιακά κλάσματα, δηλαδή κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα (κλασματικές μονάδες στη δική μας ορολογία). Ένα θεμελιώδες κλάσμα***

συμβολίζεται με τον παρονομαστή του, πάνω στον οποίο υπάρχει ένα διακριτικό σημείο, π.χ. το $\frac{1}{5}$ γράφεται ως $\overline{5}$.

Όμως είχαν ειδικό συμβολισμό για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$.

Αυτή η ιδιομορφία του συμβολισμού οφείλεται στη διαφορετική προέλευση των κλασμάτων αυτών. Τα κλάσματα αυτά έλκουν την καταγωγή τους από άμεσα πρακτικά προβλήματα, ενώ τα θεμελιώδη κλάσματα πρέπει να ήταν προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας. Όλα τα κλάσματα που χρησιμοποιούν ανάγονται σε αθροίσματα θεμελιωδών κλασμάτων. Η αναγωγή αυτή γινόταν με τη βοήθεια ειδικών πινάκων. Ένας τέτοιος πίνακας υπάρχει στον πάπυρο του Ριντ (Rhind), μαθηματικό έργο των Αιγυπτίων, που τοποθετείται τουλάχιστον το 1650 π.Χ.



Ο πίνακας περιέχει την ανάλυση όλων των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{ν}$ με "ν" περιττό αριθμό από 5 έως 101.

$\nu = 5 \quad \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} = \overline{3} + \overline{15}$

$\nu = 7 \quad \dfrac{2}{7} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{28} = \overline{4} + \overline{28}$

$\nu = 9 \quad \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{18} = \overline{6} + \overline{18}$

$\nu = 59 \quad \dfrac{2}{59} = \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{236} + \dfrac{1}{5316} = \overline{36} + \overline{236} + \overline{531}$

$\nu = 97 \quad \dfrac{2}{97} = \dfrac{1}{56} + \dfrac{1}{679} + \dfrac{1}{7766} = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$

Αλλά και στον **πάπυρο της Μόσχας** *που τοποθετείται στα 1850 π.Χ., υπάρχουν προβλήματα που περιέχουν κλάσματα και πράξεις με κλάσματα και αριθμούς, όπως για παράδειγμα “το* $\frac{1}{3}$ *του 6 είναι 2”, που αναφέρεται σε υπολογισμό του όγκου δεδομένης κόλουρης πυραμίδας.*

Οι **Έλληνες** *μαθηματικοί δεν ανέπτυξαν κάποιο νέο σύστημα γραφής των κλασμάτων. Χρησιμοποιούσαν τα θεμελιώδη κλάσματα των Αιγυπτίων και τα εξηκοντα-δικά των Βαβυλωνίων, σε υπολογιστικά προβλήματα στα μαθηματικά και την αστρονομία. Στους “άβακες” των Ρωμαίων και των Ελλήνων (τα γνωστά αριθμητάρια των πρώτων χρόνων του* δημοτικού), βρίσκουμε ειδική στήλη για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4}$.

Οι **Ινδοί** *μαθηματικοί, επίσης, γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα και τις πράξεις τους από πολύ παλιά. Στα έργα "Σουλβασούτρα", μερικά από τα οποία ανάγονται στο 500 π.Χ. ή και παλαιότερα, χρησιμοποιούνται τα θεμελιώδη κλάσματα στον προσεγγιστικό υπολογισμό όγκων ή εμβαδών. Αλλά, όταν δημιούργησαν το δεκαδικό Ινδο-Αραβικό σύστημα αρίθμησης, άρχισαν να χρησιμοποιούν και κλάσματα με μορφή πολύ κοντινή στη δική μας. Έγραφαν τον αριθμητή πάνω από τον παρονομαστή, αλλά, χωρίς την κλασματική γραμμή, για παράδειγμα* $\begin{array}{c}5\\6\end{array}$ *αντί* $\frac{5}{6}$*. Τα κλάσματα ξεχώριζαν το ένα από το άλλο με οριζόντιες και κάθετες γραμμές.*

Έτσι, π.χ. το κλάσμα $\frac{3}{5}$ *γραφόταν* $\left|\begin{array}{c}3\\5\end{array}\right|$*.*

Η **πρόσθεση** *συμβολιζόταν με την παράθεση των κλασμάτων το ένα δίπλα στο άλλο.*

Για την **αφαίρεση** *χρησιμοποιούσαν μία τελεία ή το σύμβολο "+" στα δεξιά,*
π.χ. η έκφραση $\frac{9}{12}-\frac{2}{15}-\frac{1}{5}$ *γραφόταν:* $\left|\begin{array}{c}9\\12\end{array}\right|\begin{array}{c}\dot{2}\\15\end{array}\left|\begin{array}{c}1+\\5\end{array}\right|$*.*

Στα μεικτά κλάσματα π.χ. $3\frac{1}{4}$*, το ακέραιο μέρος γραφόταν πάνω από το κλάσμα:* $\left|\begin{array}{c}3\\1\\4\end{array}\right|$*.*

Τα κλάσματα στους **Κινέζους** *εμφανίστηκαν σχεδόν μαζί με τους ακέραιους αριθμούς. Τα πρώτα κλάσματα, πουχρησιμοποιούσαν, ήταν το* $\frac{1}{2}$*,* $\frac{1}{3}$ *και* $\frac{2}{3}$*.*

Στους κανόνες των αριθμητικών πράξεων στους Κινέζους, σε αντίθεση με τους άλλους λαούς, δεν υπήρχε τίποτα το ασυνήθιστο. Ήδη τον 2ο αιώνα π.Χ. οι Κινέζοι είχαν επεξεργαστεί, επαρκώς, όλες τις πράξεις με κλάσματα. Τον 3ο αιώνα μ.Χ. οι Κινέζοι, που χρησιμοποιούσαν, ήδη, το δεκαδικό σύστημα, άρχισαν στην ουσία, να χρησιμοποιούν δεκαδικά κλάσματα με μετρολογική μορφή.

Τα δεκαδικά κλάσματα εισάγονται στο έργο του Πέρση μαθηματικού Αλ-Κασί, ο οποίος εργαζόταν στο Αστεροσκοπείο της Σαμαρκάνδης. Αν και στο παρελθόν, υπήρξαν προσπάθειες στον Αραβικό κόσμο να εισαχθούν τα δεκαδικά κλάσματα, πρώτος ο Αλ-Κασί διατυπώνει τους βασικούς κανόνες των πράξεων και τους τρόπους μετατροπής των εξηκονταδικών κλασμάτων σε δεκαδικά και αντίστροφα.

Η είσοδος των κλασμάτων στα Ευρωπαϊκά μαθηματικά ανάγεται στον Λεονάρδο της Πίζας (1202), ενώ οι όροι “αριθμητής” και “παρονομαστής” απαντώνται στον Πλανούδη (τέλη 13ου αιώνα).

Ανακεφαλαίωση

ΚΛΑΣΜΑΤΑ, $\frac{\kappa}{\nu}$ όπου κ και ν φυσικοί αριθμοί, $\nu \neq 0$

Ίσα ή ισοδύναμα: αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ τότε $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \gamma}$ και $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : \delta}{\beta : \delta}$

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$ και $\frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$

$\frac{\alpha}{\beta}$ **ανάγωγο** όταν ΜΚΔ (α, β) = 1

$\frac{7}{12}$ **ανάγωγο** αφού ΜΚΔ (7, 12) = 1

ομώνυμα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}$ **ετερώνυμα** $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$

ομώνυμα $\frac{2}{7}, \frac{5}{7}$ **ετερώνυμα** $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}$

$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta}$ *όταν* $\alpha > \gamma$ $\frac{9}{13} > \frac{5}{13}$ *αφού* $9 > 5$

$\frac{7}{12} = \frac{28}{48}$ *και* $\frac{5}{16} = \frac{15}{48}$ *Επειδή* $\frac{28}{48} > \frac{15}{48}$, *άρα* $\frac{7}{12} > \frac{5}{16}$

και $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\gamma}$ *όταν* $\alpha > \gamma$ $\frac{13}{9} < \frac{13}{5}$ *αφού* $9 > 5$

Ο **Μεικτός** αποτελείται από έναν **ακέραιο** και ένα **κλάσμα** μικρότερο της μονάδας.

$$1\frac{4}{5} = 1 + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ *είναι* ***αντίστροφα*** *όταν* $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = 1$

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{10}{14} = \frac{7 \cdot 10}{5 \cdot 14} = \frac{70}{70} = 1$$

Πράξεις μεταξύ κλασμάτων

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

$\frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7+2}{5} = \frac{9}{5}$ *και* $\frac{7}{4} + \frac{2}{3} = \frac{21}{12} + \frac{8}{12} = \frac{29}{12}$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$$

$\frac{6}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6-2}{5} = \frac{4}{5}$ *και* $\frac{7}{4} - \frac{2}{3} = \frac{21}{12} - \frac{8}{12} = \frac{13}{12}$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$ *και* $\lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda \cdot \alpha}{\beta}$

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 4}=\frac{15}{28} \quad \text{και} \quad 7\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{5}=\frac{21}{5}$$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

$$\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

$$5:4=5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \quad \text{και} \quad \frac{7}{3}:\frac{5}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{28}{15}$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΕ ΑΠΛΟ

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{7\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{28}{15}$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ


1
x